Paare s-freier Zahlen

Diplomarbeit

von

Julia Brandes

aus Göttingen

Institut für Algebra und Zahlentheorie

Universität Stuttgart

2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Sei $x > 0$. Wie viele Zahlen $n \leq x$ kann es geben, die durch keine s-te Potenz teilbar sind? Im Fall $s = 2$ ist die quadrierte Möbiusfunktion $\mu^2(n)$ auf natürliche Weise als Indikatorfunktion gegeben und man kommt relativ leicht auf die Abschätzung

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6x}{\pi^2} + O(\sqrt{x}).$$

Das Resultat lässt sich auf größere s verallgemeinern und gibt dann

$$\#\{n \leq x : \ n \text{ ist } s\text{-frei}\} = \frac{x}{\zeta(s)} + O(x^{1/s}),$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet. Es ist allerdings nicht möglich, wesentliche Verbesserungen im Fehlerterm zu erhalten, ohne die Riemannsche ypothese vorauszusetzen. Eine Übersicht über diese und andere Ergebnisse bezüglich s-freier Zahlen findet sich in einem Aufsatz von Pappalardi [6].

Betrachtet man die s-freien Zahlen nicht isoliert, sondern zählt Paare mit gewissen Abständen a, so erweist es sich als möglich, Fortschritte zu erzielen, auch ohne dafür die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung annehmen zu müssen. Sei also $E_s(n)$ die Indikatorfunktion auf den s-freien Zahlen, dann gilt es, eine Abschätzung für

$$\sum_{n \leq x} E_s(n) E_s(n+a)$$

zu finden. Im nächstliegenden Fall mit $a = 1$ besagt ein elementares Resultat, dass

$$\sum_{n \leq x} E_s(n) E_s(n+1) = C_s x + O\left(x^{\frac{2}{s+1}+\epsilon}\right) \tag{1}$$

gilt, wobei die Konstante C_s im Hauptterm durch das Eulerprodukt

$$C_s = \prod_p \left(1 - \frac{2}{p^s}\right) \tag{2}$$

gegeben ist (siehe z.B. Carlitz [2]).

Roger Heath-Brown [5] ist es in einer Arbeit von 1984 mit einem Sieb für Quadrate gelungen, den Fehlerterm für den Fall $s = 2$ auf $O\left(x^{\frac{7}{11}}(\log x)^7\right)$ zu verbessern. Mit ähnlichen Methoden werden wir für allgemeines $s \geq 2$ folgenden Satz zeigen:

Theorem 1. *Seien $E_s(n)$ die Indikatorfunktion auf den s-freien Zahlen und C_s der in (2) gegebene Ausdruck. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$*

$$\sum_{n \leq x} E_s(n)E_s(n+1) = C_s x + O\big(x^{\frac{14}{7s+8}+\epsilon}\big).$$

Der Exponent ist hier um $O(1/s^2)$ besser als im Resultat von Carlitz, wobei das ϵ die Logarithmuspotenzen zusammenfasst; mit sorgfältigerer Rechnung könnte man diese auch explizit angeben und zu minimieren versuchen, allerdings erschien es in diesem Kontext nicht wesentlich, da die Ersparnis zum größten Teil bei den Potenzen von x eintritt.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jörg Brüdern, der mir dieses Thema vorgeschlagen hat.

2 Ein Sieb für s-te Potenzen

Heath-Brown [5] verwendet im quadratischen Fall ein Sieb, das mit Jacobisymbolen arbeitet. Um seine Methode auf höhere Potenzen zu verallgemeinern, ist es nötig, eine geeignete Funktion einzuführen, die in ähnlicher Weise auf den n-ten Potenzen modulo p operiert.
Zu p mit $(s; p-1) \neq 1$ sei $\left(\frac{n}{p}\right)_s$ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter modulo p mit $\left(\frac{n^s}{p}\right)_s = \chi_0(n)$. Ein solcher existiert, denn da die Anzahl der Charaktere $\chi \pmod p$, die $\chi^s = \chi_0$ genügen, durch $(p-1; s) \geq 2$ gegeben ist, kann man immer einen Nicht-Hauptcharakter mit der gewünschten Eigenschaft finden.
Sei nun w eine nichtnegative Gewichtsfunktion auf den ganzen Zahlen, so dass $\sum_n w(n)$ beschränkt ist; $\mathcal{A}$ bezeichne die Folge $(w(n))$. Wir definieren

$$S(\mathcal{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} w(n^s).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Theorem 2. *Sei $s \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\mathcal{P}$ eine Menge von Primzahlen mit der Eigenschaft $(s; p-1) \neq 1$ für jedes $p \in \mathcal{P}$. Die Kardinalität dieser Menge sei P. Weiterhin gelte $w(n) = 0$ für $n = 0$ und $n \geq e^P$. Dann ist*

$$S(\mathcal{A}) \ll P^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} w(n) + P^{-2} \sum_{p \neq q \in \mathcal{P}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \left(\frac{n}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{n}{q}\right)_s} \right|.$$

Proof. Es sei

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \left| \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\frac{n}{p}\right)_s \right|^2.$$

Ist n eine s-te Potenz, etwa $n = m^s$, dann nimmt der Charakter für jede zu m teilerfremde Primzahl p den Wert 1 an, und es gilt

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\frac{n}{p}\right)_s = \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid m}} 1 \geq P - \sum_{p \mid m} 1.$$

Teilt man die letzte Summe bei $\log m$, so erhält man

$$\sum_{p \mid m} 1 = \sum_{\substack{p \mid m \\ p \leq \log m}} 1 + \sum_{\substack{p \mid m \\ p > \log m}} 1.$$

Die erste Summe ist $\ll \frac{\log m}{\log \log m}$ nach dem Primzahlsatz. Setzt man die Anzahl der in der zweiten Summe gezählten Primteiler gleich r, so liefert eine grobe Abschätzung

$$(\log m)^r \leq \prod_{\substack{p < \log m \\ p \mid m}} p < m,$$

also $r < \frac{\log m}{\log \log m}$. Insgesamt hat man damit

$$\sum_{p \mid m} 1 \ll \frac{\log m}{\log \log m}.$$

Für $P < m < e^P$ ist dies $\ll \frac{P}{\log \log P}$. Für die restlichen $m \leq P$ ist

$$\sum_{p \mid m} 1 \leq \sum_{p \leq m} 1 \leq \sum_{p \leq P} 1 \ll \frac{P}{\log P}$$

mit dem Primzahlsatz. Damit ergibt sich

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\frac{n}{p}\right)_s \geq P + O\left(\frac{P}{\log\log P}\right) \gg P,$$

für den gesamten Ausdruck folgt also $\Sigma \gg P^2 S(\mathcal{A})$.
Andererseits erhält man durch Ausmultiplizieren der Potenz

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sum_{p,q \in \mathcal{P}} \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \left(\frac{n}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{n}{q}\right)_s} \\
&\ll \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} w(n) + \sum_{p \neq q \in \mathcal{P}} \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \left(\frac{n}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{n}{q}\right)_s} \\
&\ll P \sum_{n=1}^{\infty} w(n) + \sum_{p \neq q \in \mathcal{P}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \left(\frac{n}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{n}{q}\right)_s} \right| .
\end{aligned}$$

Die Kombination der beiden Abschätzungen führt jetzt auf die Aussage von Satz 2. □

Bemerkungen. (a). Auf die Nebenbedingung $w(n) = 0$ für $n \geq e^P$ kann nicht verzichtet werden. Sei etwa zu einer endlichen Menge $\mathcal{P}$ das Produkt der in $\mathcal{P}$ enthaltenen Primzahlen durch m gegeben, und die Gewichtsfunktion w sei definiert durch $w(n_0) = 1$ für $n_0 = m^s$, aber $w(n) = 0$ für alle anderen $n \neq n_0$. In diesem Fall gibt das Sieb $S(\mathcal{A}) \ll P^{-1}$, während trivial $S(\mathcal{A}) = 1$ gilt.

(b). Satz 2 ist für beliebige Charaktere und auch für in geeigneter Weise normierte Charaktersummen richtig, sofern sie auf s-ten Potenzen den Wert 1 annehmen. Wählt man allerdings den Hauptcharakter oder eine Charaktersumme, in der dieser vorkommt, so ergibt sich unabhängig von der Wahl von $\mathcal{P}$ und der verwendeten Gewichtsfunktion die Abschätzung

$$S(\mathcal{A}) \ll P^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} w(n) + P^{-2} \sum_{p \neq q \in \mathcal{P}} \sum_{n=1}^{\infty} w(n) \ll \sum_{n=1}^{\infty} w(n).$$

Wegen $S(\mathcal{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} w(n^s)$ ist diese Aussage trivial und liefert keinerlei neue Information.

(c). Auch für Nicht-Hauptcharaktere ist Satz 2 in der Regel nicht scharf. Sei zum Beispiel $w(n) = 1$ für $1 \leq n \leq x$ und $w(n) = 0$ sonst, und $\mathcal{P}$ sei die Menge der Primzahlen p unterhalb einer Größe x^α, für die $s|p-1$ gilt, wobei wir α zunächst unbestimmt lassen. Damit ist nach dem Satz von Siegel-Walfisz $P \asymp x^\alpha(\log x)^{-1}$ (siehe z.B. Brüdern [1], Satz 3.3.3) und man erhält für die Anzahl der s-ten Potenzen unterhalb von x die Abschätzung

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}) &\ll P^{-1}\sum_{n\le x} 1 + P^{-2}\sum_{p\ne q\in\mathcal{P}}\left|\sum_{n\le x}\left(\frac{n}{p}\right)_s\overline{\left(\frac{n}{q}\right)_s}\right| \\ &\ll x^{1-\alpha}\log x + P^{-2}\sum_{p\ne q\in\mathcal{P}} x^\alpha \log x \\ &\ll x^{1-\alpha}\log x + x^\alpha \log x. \end{aligned}$$

Die mittlere Zeile folgt dabei mit der Pólya-Vinogradov-Ungleichung (Brüdern [1], Satz 2.3.2) weil das Produkt von Charakteren wieder ein Charakter zum Produktmodul ist. Satz 2 gibt also für die Anzahl der s-ten Potenzen unterhalb von x unabhängig von s bestenfalls die Schranke $O(x^{1/2}\log x)$, während offensichtlich $S(\mathcal{A}) = x^{1/s} + O(1)$ gilt.

3 Anwendung auf Paare von s-freien Zahlen

3.1 Vorbetrachtungen

Um nun Satz 2 auf das Problem der Paare von s-freien Zahlen anwenden zu können, schreiben wir mit der bekannten Identität über die Summe der Möbiusfunktion

$$E_s(n) = \sum_{j^s|n}\mu(j).$$

Damit ist

$$\sum_{n\le x} E_s(n)E_s(n+1) = \sum_{j,k}\mu(j)\mu(k)N(x,j,k),$$

wobei die Zählfunktion $N(x,j,k)$ durch die Anzahl der Lösungen

$$N(x,j,k) = \#\{n\le x;\ j^s|n,\ k^s|n+1\}$$

gegeben ist. Man beobachtet, dass $N(x,j,k) = xj^{-s}k^{-s} + O(1)$ gilt, falls $(j;k)=1$ ist; da jeder gemeinsame Teiler von j und k sowohl in n als auch in $n+1$ vorkommen müsste, ist für nicht teilerfremde j und k die Bedingung leer. Der Beitrag der Terme mit $jk \le y$, wobei y noch zu bestimmen ist, beträgt also

$$x\sum_{\substack{jk\le y\\(j;k)=1}}\mu(j)\mu(k)(jk)^{-s}+O\Big(\sum_{jk\le y}1\Big). \tag{3}$$

Nun ergänzt man die erste Summe bis ins Unendliche. Fasst man dann die jk zu n zusammen, so entsteht wegen der verschiedenen Zerlegungen von n ein Faktor $d(n)$. Damit ist obiger Ausdruck

$$\begin{aligned}
&= x\sum_{(j;k)=1}\mu(jk)(jk)^{-s}+O\Big(\sum_{n\le y}d(n)\Big)+O\Big(x\sum_{n>y}d(n)n^{-s}\Big)\\
&= x\sum_{n}\frac{\mu(n)d(n)}{n^s}+O(y\log y)+O(xy^{1-s+\epsilon})
\end{aligned}$$

mit der trivialen Abschätzung $d(n)\ll n^\epsilon$ für die Teilerfunktion. Die im Hauptterm entstehende Summe lässt sich als Eulerprodukt schreiben und ergibt

$$\sum_n\frac{\mu(n)d(n)}{n^s}=\prod_p\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu(p^i)d(p^i)}{p^{is}}=\prod_p\left(1+\frac{-1\cdot 2}{p^s}\right),$$

also genau den in (2) gegebenen Ausdruck für die Konstante C_s. Insgesamt ist (3) also

$$= \quad C_sx+O\left(y\log y\right)+O\left(xy^{1-s+\epsilon}\right).$$

Die Menge der verbleibenden j und k zerfällt in Intervalle $J<j\le 2J$ und $K<k\le 2K$, wobei $JK\gg y$ und $J,K\ll x^{1/s}$ gilt. Die Anzahl dieser Intervalle ist $O\left((\log x)^2\right)$. Man findet nun geeignete J und K, so dass

$$\sum_{jk>y}\mu(j)\mu(k)N(x,j,k)\ll N(\log x)^2$$

gilt, wobei

$$N=\#\left\{(j,k,u,v);\ j^su+1=k^sv\le x,\ J<j\le 2J,\ K<k\le 2K\right\}$$

ist. Der noch zu bestimmende Parameter y wird im Bereich $x^{1/s}\le y\le x$ liegen. Als Abschätzung erhält man also

$$\sum_{n\le x}E_s(n)E_s(n+1)=C_sx+O(y^{1+\epsilon})+O\left(N(\log x)^2\right). \tag{4}$$

Wir können nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $J \geq K$ ist, wobei sich das Vorzeichen der 1 im Ausdruck für N gegebenenfalls ändert. Denn ist $J < K$, so tauscht man die Rollen von j und k sowie von u und v. Mit dieser Umbenennung geht der Ausdruck $j^s u + 1 = k^s v$ in $j^s u - 1 = k^s v$ über und es gilt $J \geq K$ wie gewünscht.
Um jetzt eine Schranke für N zu finden, sortiert man die von N gezählten Quadrupel nach dem Wert von u und erhält $N = \sum N_u$ mit

$$N_u = \#\{(j,k,v);\ j^s u \pm 1 = k^s v \leq x,\ J < j \leq 2J,\ K < k \leq 2K\}.$$

Die Menge der u zerfällt in $O(\log x)$ Intervalle $U < u \leq 2U$ mit

$$U \ll xJ^{-s}. \tag{5}$$

Durch Auflösen der Gleichung $j^s u \pm 1 = k^s v$ und den jeweiligen Bedingungen an j und k kann man

$$N_u \quad \leq \quad \#\{(j,k,v);\ j^s u \pm 1 = k^s v,\ K < k \leq 2K,\ L \leq v \leq M\} \tag{6}$$

schreiben, wobei die Schranken an v durch

$$L = \max(2^{-s}K^{-s}(J^s U \pm 1),\ 1), \quad M = K^{-s}(2^{s+1}J^s U \pm 1)$$

gegeben sind. Setzt man weiter

$$N(U) = \sum_{U < u \leq 2U} N_u,$$

so ergibt sich als Abschätzung an N der Ausdruck

$$N \ll (\log x) \max_{U \ll xJ^{-s}} N(U). \tag{7}$$

3.2 Anwendung von Satz 2

Mit (6) haben wir eine Darstellung von N_u erhalten, in der nur die Variablen k und v auf der rechten Seite der Gleichung unabhängig voneinander Größenbedingungen erfüllen, so dass alle Parameter auf der linken Seite entweder fixiert sind oder aber durch die Gleichung eindeutig bestimmt werden. Dies ermöglicht es uns, eine geeignete Gewichtsfunktion w zu finden, die die in (6) kodierten Informationen in die Sprache von Satz 2 überträgt und uns so Auskunft über die Größe der N_u gibt.
Es sei also $w(n) = 0$, falls n kein Vielfaches von u^{s-1} ist, und

$$w(mu^{s-1}) = \#\{(k,v); u | k^s v \mp 1,\ m = k^s v \mp 1,\ K < k \leq 2K,\ L \leq v \leq M\}$$

im anderen Fall. Mit dieser Wahl gilt: Wird $w(n) \neq 0$ von $\mathcal{A}$ gezählt, d.h. ist $n = mu^{s-1}$ eine s-te Potenz, so lässt m sich als $m = j^s u$ schreiben. Da nach Konstruktion aber auch $m = k^s v \mp 1$ gilt, übersetzt diese Darstellung Paare von durch s-te Potenzen teilbaren Zahlen in s-te Potenzen, so dass das im vorigen Kapitel definierte Sieb greift. Zudem gilt nach Konstruktion $N_u \leq S(\mathcal{A})$.

Jetzt sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Primzahlen p in $Q < p \leq 2Q$ mit $p \nmid u$ und $s|p-1$. Dabei liegt Q im Intervall

$$(\log x)^2 \leq Q \leq x \tag{8}$$

und wird später optimal gewählt. Mit dem Satz von Siegel-Walfisz gilt für die Menge dieser Zahlen $P \asymp Q(\log Q)^{-1}$ und folglich

$$\log n \leq \log x \leq \sqrt{Q} \leq P$$

für genügend große Q und alle mit positivem Gewicht gezählten n. Die Zahlen n, die von w gezählt werden, sind also wie gefordert durch e^P nach oben beschränkt; die Bedingung $w(0) = 0$ ist nach Konstruktion trivial erfüllt. Wir können also Satz 2 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} N_u &\ll P^{-1} \sum_n w(n) + P^{-2} \sum_{p \neq q \in \mathcal{P}} \left| \sum_{k,v} \left(\frac{u^{s-1}(k^s v \mp 1)}{p} \right)_s \overline{\left(\frac{u^{s-1}(k^s v \mp 1)}{q} \right)_s} \right| \\ &\ll \left(\frac{\log x}{Q} \right) \sum_n w(n) + P^{-2} \sum_{p \neq q \in \mathcal{P}} \left| \sum_{k,v} \left(\frac{k^s v \mp 1}{p} \right)_s \overline{\left(\frac{k^s v \mp 1}{q} \right)_s} \right|, \end{aligned} \tag{9}$$

wobei (8) und die Multiplikativität der Charaktere benutzt wurden. Die Bedingungen an k und v in der inneren Summe sind jeweils durch

$$K < k \leq 2K, \quad L \leq v \leq M, \quad u|k^s v \mp 1 \tag{10}$$

gegeben. Diesen Ausdruck gilt es nun auszuwerten, um eine Schranke an N und damit an

$$\sum_{n \leq x} E_s(n) E_s(n+1) - C_s x$$

zu finden. Die Behandlung des ersten Terms auf der rechten Seite der Ungleichung in (9) bereitet keine Schwierigkeiten. Der Hauptaufwand wird darin liegen, eine Abschätzung an den zweiten Term zu finden. Dabei werden wir sehen, dass sich die inneren Summe derart modifizieren lässt, dass sie einzelne voneinander unabhängige Faktoren zerfällt, deren Behandlung leichter ist. Hier wird sich auch herausstellen, dass die angestrebte Ersparnis dadurch möglich wird, dass die s-ten Potenzen modulo Primzahlen in gewissem Sinne günstig verteilt sind.

3.3 Auswertung des Siebprozesses

Der Beitrag des ersten Termes aus (9) zu $N(U)$ ist insgesamt

$$\begin{aligned}
&\ll \left(\frac{\log x}{Q}\right)\sum_{k,v}\sum_{u|k^s v\mp 1} 1 \\
&\ll \left(\frac{\log x}{Q}\right)\sum_{K<k\leq 2K}\sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv\mp 1 \pmod{k^s}}} d(n). \\
&\ll \left(\frac{\log x}{Q}\right) K^{1-s}\sum_{n\leq x} n^{\epsilon} \\
&\ll Q^{-1}K^{1-s}x^{1+\epsilon}, \qquad (11)
\end{aligned}$$

wobei die Standardabschätzung an die Teilerfunktion benutzt wurde.

Um jetzt eine Aussage über das Verhalten von

$$S := \sum_{k,v}\left(\frac{k^s v\mp 1}{p}\right)_s\overline{\left(\frac{k^s v\mp 1}{q}\right)_s}$$

unter den Bedingungen (10) zu gewinnen, transformiert man den Ausdruck mit dem Ziel, die Summen zu separieren und alle weiteren Bedingungen als Exponentialsummen zu schreiben. Auf diese Weise werden wir eine Abschätzung erhalten, die sich analytisch leichter handhaben lässt. Da zudem

$$P^{-2}\sum_{p\neq q\in\mathcal{P}} 1 = O(1)$$

gilt, wird die Schranke an $|S|$ die endgültige Abschätzung für den zweiten Term in (9) darstellen.
Indem man die Argumente der Charaktere modulo upq reduziert und die Bedingungen an k und v in Exponentialsummen kodiert, erhält man

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ u|\alpha^s\beta\mp 1}}^{upq}\left(\frac{\alpha^s\beta\mp 1}{p}\right)_s\overline{\left(\frac{\alpha^s\beta\mp 1}{q}\right)_s}\Bigg|\sum_{\substack{K<k\leq 2K\\ k\equiv\alpha\ (upq)}} 1\Bigg|\Bigg|\sum_{\substack{L\leq v\leq M\\ v\equiv\beta\ (upq)}} 1\Bigg| \\
&= \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ u|\alpha^s\beta\mp 1}}^{upq}\left(\frac{\alpha^s\beta\mp 1}{p}\right)_s\overline{\left(\frac{\alpha^s\beta\mp 1}{q}\right)_s}\left\{\frac{1}{upq}\sum_{\gamma=1}^{upq}\sum_{K<k\leq 2K} e\left(\frac{\gamma(\alpha-k)}{upq}\right)\right\} \\
&\qquad\times\left\{\frac{1}{upq}\sum_{\delta=1}^{upq}\sum_{L\leq v\leq M} e\left(\frac{\delta(\beta-v)}{upq}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Jetzt ist es möglich, die jeweiligen Summen über α und β, über k und über v zu separieren. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} S(u,pq;\gamma,\delta) &= \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ u \mid \alpha^s\beta\mp 1}}^{upq} \left(\frac{\alpha^s\beta\mp 1}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{\alpha^s\beta\mp 1}{q}\right)_s} e\left(\frac{\gamma\alpha+\delta\beta}{upq}\right) && (12) \\ \vartheta_\gamma &= \sum_{K<k\leq 2K} e\left(\frac{-\gamma k}{upq}\right) \ll \min\left(K, \left\|\frac{\gamma}{upq}\right\|^{-1}\right) && (13) \\ \varphi_\delta &= \sum_{L\leq v\leq M} e\left(\frac{-\delta v}{upq}\right) \ll \min\left(J^s K^{-s} U, \left\|\frac{\delta}{upq}\right\|^{-1}\right) && (14) \end{aligned}$$

bekommt man

$$S = (upq)^{-2} \sum_{\gamma,\delta=1}^{upq} S(u,pq;\gamma,\delta)\vartheta_\gamma\varphi_\delta. \tag{15}$$

Da nach Definition von $\mathcal{P}$ keines der $p\in\mathcal{P}$ in u aufgeht, zerfällt die Summe $S(u,pq;\gamma,\delta)$ in Faktoren, wie im folgenden Lemma beschrieben:

Lemma 1. *Sei $u=\prod r^f$ die Primfaktorzerlegung von u und*

$$\begin{aligned} S_1(p;c,d) &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \left(\frac{\alpha^s\beta\mp 1}{p}\right)_s e\left(\frac{c\alpha+d\beta}{p}\right) \\ S_2(r^f;c,d) &= \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ r^f \mid \alpha^s\beta\mp 1}}^{r^f} e\left(\frac{c\alpha+d\beta}{r^f}\right). \end{aligned}$$

Die Primzahlen p und q seien zu u teilerfremd. Dann lautet die Faktorisierung des in (12) gegebenen Ausdrucks

$$S(u,pq;\gamma,\delta) = S_1(p;c,d)\overline{S_1(q;-c,-d)} \prod_{\prod r^f=u} S_2(r^f;c,d), \tag{16}$$

wobei c und d ganze Zahlen sind, so dass $(c;upq)=(\gamma;upq)$ und $(d;upq)=(\delta;upq)$ gilt.

Proof. Zunächst gilt für teilerfremde p,q die Gleichung

$$\sum_{a=1}^{p}\sum_{b=1}^{q} e\left(\frac{a}{p}\right) e\left(\frac{b}{q}\right) = \sum_a\sum_b e\left(\frac{aq+pb}{pq}\right) = \sum_{c=1}^{pq} e\left(\frac{c}{pq}\right)$$

mit Substitution $c = aq + bp$, wobei c wegen des Chinesischen Restsatzes alle Werte zwischen 1 und pq genau einmal annimmt. Folglich lässt sich das Produkt über die S_2 zusammenfassen und schreiben als

$$\prod_{\prod r^f = u} S_2(r^f; \gamma, \delta) = S_2(u; \gamma, \delta) = \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ u \mid \alpha^s\beta \mp 1}}^{u} e\left(\frac{c\alpha + d\beta}{u}\right).$$

Dies wird durch die Kongruenzbedingung an α und β nicht beeinträchtigt. Weiter hat man

$$\begin{aligned} \overline{S_1(q; -\gamma, -\delta)} &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \overline{\left(\frac{\alpha^s\beta \mp 1}{p}\right)_s} \; \overline{e\left(\frac{-(\gamma\alpha + \delta\beta)}{q}\right)} \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{q} \overline{\left(\frac{\alpha^s\beta \mp 1}{p}\right)_s} e\left(\frac{\gamma\alpha + \delta\beta}{q}\right). \end{aligned}$$

Um nun $S(u, pq; \gamma, \delta)$ zu berechnen, setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= qu\alpha_1 + pu\alpha_2 + pq\alpha_3 \\ \beta &= qu\beta_1 + pu\beta_2 + pq\beta_3 \end{aligned}$$

mit

$$1 \le \alpha_1, \beta_1 \le p \qquad 1 \le \alpha_2, \beta_2 \le q \qquad 1 \le \alpha_3, \beta_3 \le u.$$

Diese Darstellung ist eindeutig modulo der jeweiligen Restklassensysteme und man hat

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ u \mid \alpha^s\beta \mp 1}}^{upq} \left(\frac{\alpha^s\beta \pm 1}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{\alpha^s\beta \pm 1}{q}\right)_s} e\left(\frac{\gamma\alpha + \delta\beta}{upq}\right) \\ = &\sum_{\alpha_1,\beta_1=1}^{p} \sum_{\alpha_2,\beta_2=1}^{q} \sum_{\substack{\alpha_3,\beta_3=1 \\ u \mid \alpha_3^s\beta_3 \mp 1}}^{u} \left(\frac{\alpha^s\beta \pm 1}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{\alpha^s\beta \pm 1}{q}\right)_s} \\ &\times e\left(\frac{(\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)qu + (\gamma\alpha_2 + \delta\beta_2)pu + (\gamma\alpha_3 + \delta\beta_3)pq}{pqu}\right) \\ = &\sum_{\alpha_1,\beta_1=1}^{p} \sum_{\alpha_2,\beta_2=1}^{q} \sum_{\substack{\alpha_3,\beta_3=1 \\ u \mid \alpha_3^s\beta_3 \mp 1}}^{u} \left(\frac{\alpha^s\beta \pm 1}{p}\right)_s \overline{\left(\frac{\alpha^s\beta \pm 1}{q}\right)_s} \\ &\times e\left(\frac{\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1}{p}\right) e\left(\frac{\gamma\alpha_2 + \delta\beta_2}{q}\right) e\left(\frac{\gamma\alpha_3 + \delta\beta_3}{u}\right). \end{aligned}$$

Weil p, q und u paarweise teilerfremd sind, gilt für die Charaktere wegen der p-Periodizität

$$\begin{aligned}\left(\frac{\alpha^s\beta \pm 1}{p}\right)_s &= \left(\frac{(qu\alpha_1 + pu\alpha_2 + pq\alpha_3)^s(qu\beta_1 + pu\beta_2 + pq\beta_3) \pm 1}{p}\right)_s \\ &= \left(\frac{(qu\alpha_1)^s(qu\beta_1) \pm 1}{p}\right)_s.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies für den zu berechnenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha_1,\beta_1=1}^{p} \left(\frac{(qu\alpha_1)^s(qu\beta_1) \pm 1}{p}\right)_s e\left(\frac{\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1}{p}\right) \\
&\quad \times \sum_{\alpha_2,\beta_2=1}^{q} \overline{\left(\frac{(pu\alpha_2)^s(pu\beta_2) \pm 1}{q}\right)_s} e\left(\frac{\gamma\alpha_2 + \delta\beta_2}{q}\right) \sum_{\substack{\alpha_3,\beta_3=1 \\ u|\alpha_3^s\beta_3\mp 1}}^{u} e\left(\frac{\gamma\alpha_3 + \delta\beta_3}{u}\right) \\
&= \sum_{\alpha_1,\beta_1=1}^{p} \left(\frac{(qu\alpha_1)^s(qu\beta_1) \pm 1}{p}\right)_s e\left(\frac{qu(c\alpha_1 + \delta\beta_1)}{p}\right) \\
&\quad \times \sum_{\alpha_2,\beta_2=1}^{q} \overline{\left(\frac{(pu\alpha_2)^s(pu\beta_2) \pm 1}{q}\right)_s} e\left(\frac{pu(c\alpha_2 + d\beta_2)}{q}\right) \\
&\quad \times \sum_{\substack{\alpha_3,\beta_3=1 \\ u|\alpha_3^s\beta_3\mp 1}}^{u} e\left(\frac{pq(c\alpha_3 + d\beta_3)}{u}\right),
\end{aligned}$$

wobei c und d durch die Kongruenzen

$$\begin{aligned}
\gamma &\equiv quc \pmod p; & \gamma &\equiv puc \pmod q; & \gamma &\equiv pqc \pmod u \\
\delta &\equiv qud \pmod p; & \delta &\equiv pud \pmod q; & \gamma &\equiv pqc \pmod u.
\end{aligned}$$

eindeutig modulo pqu gegeben sind. Mit Verschiebung der Summationsindizes α_1 nach $qu\alpha_1$ und entsprechend erhält man nun

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha_1,\beta_1=1}^{p} \left(\frac{\alpha_1^s\beta_1 \pm 1}{p}\right)_s e\left(\frac{c\alpha_1 + d\beta_1}{p}\right) \sum_{\alpha_2,\beta_2=1}^{q} \overline{\left(\frac{\alpha_2^s\beta_2 \pm 1}{q}\right)_s} e\left(\frac{c\alpha_2 + d\beta_2}{q}\right) \\
&\quad \times \sum_{\substack{\alpha_3,\beta_3=1 \\ u|\alpha_3^s\beta_3\mp 1}}^{u} e\left(\frac{c\alpha_3 + d\beta_3}{u}\right),
\end{aligned}$$

also genau den gesuchten Ausdruck $S_1(p; c, d)\overline{S_2(q; -c, -d)}S_2(u; c, d)$. Da p, q und r relativ prim sind, sind schließlich die ggT-Bedingungen $(c; upq) = (\gamma; upq)$ und $(d; upq) = (\delta; upq)$ eine direkte Konsequenz aus den Bestimmungsgleichungen für c und d. Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

3.4 Exkurs über Exponentialsummen

Um die hier auftretenden Exponentialsummen zu behandeln, nutzen wir folgendes Lemma:

Lemma 2. *Für die Exponentialsummen S_1 und S_2 gelten folgende Abschätzungen:*

(i). $|S_1(p;c,d)| \ll p$,

(ii). $|S_2(p;c,d)| \leq s(s+1)\, p^{1/2}(p;c;d)^{1/2} + (s+1)^2$.

Proof. Zunächst betrachten wir S_1. Für $\alpha \neq p$ sei $\bar{\alpha}$ das multiplikativ Inverse zu α modulo p. Verschiebt man den Summationsindex von β nach $\bar{\alpha}^s \pm \beta$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
|S_1(p;c,d)| &= \left| \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \left(\frac{\alpha^s\beta \mp 1}{p}\right)_s e\left(\frac{c\alpha + d\beta}{p}\right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\beta=1}^{p} \left(\frac{\beta}{p}\right)_s e\left(\frac{c\alpha + d\bar{\alpha}^s \pm d\beta}{p}\right) \right| + O(p) \\
&= \left| \sum_{\alpha=1}^{p-1} e\left(\frac{c\alpha + d\bar{\alpha}^s}{p}\right) \right| \left| \sum_{\beta=1}^{p} \left(\frac{\beta}{p}\right)_s e\left(\frac{\pm d\beta}{p}\right) \right| + O(p) \\
&= |S_2(p;c,d)|\, p^{1/2} + O(p);
\end{aligned}$$

die Aussage in (i) ist also unter Benutzung der bekannten Schranke an Gaußsche Summen eine direkte Konsequenz von (ii).

Um jetzt S_2 abzuschätzen, unterscheiden wir mehrere Fälle: Die Aussage ist trivial, falls $p|(c;d)$. Sei p nun ein Teiler von c, aber nicht von d. Dann folgt

$$S_2(p;c,d) = \sum_{\beta=1}^{p} e\left(\frac{d\beta}{p}\right) \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha^s\beta \equiv \pm 1 \pmod p}}^{p} 1.$$

Für $\beta \neq p$ hat die Kongruenz in der letzten Summationsbedingung genau $(s;p-1)$ Lösungen, falls $\pm\bar{\beta}$ eine s-te Potenz ist; andernfalls ist sie unlösbar. Wählt man

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi^s = \chi_0}} \chi(n) = \begin{cases} \#\{\chi \bmod p : \ \chi^s = \chi_0\} = (s, p-1) & n \text{ ist } s\text{-te Potenz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Indikatorfunktion auf den k-ten Potenzen, so ergibt sich weiter unter Vertauschung der Summationsreihenfolge und Ergänzen der Summe über β auf eine volle Periode

$$\begin{aligned}
|S_2(p;c,d)| &= \Big|\sum_{\beta=1}^{p-1} e\left(\frac{d\beta}{p}\right) \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi^s=\chi_0}} \chi(\mp\bar{\beta})\Big| \\
&= \Big|\sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi^s=\chi_0}} \sum_{\beta=1}^{p} \chi(\mp\bar{\beta}) e\left(\frac{d\beta}{p}\right) - 1\Big| \\
&\leq \sum_{\substack{\chi \bmod p \\ \chi^s=\chi_0}} p^{1/2} + 1 \leq (s;p-1)\, p^{1/2} + 1,
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt wieder die Abschätzung an Gaußsche Summen eingegangen ist. Wegen $(s;p-1) < s(s+1)$ folgt die Behauptung. Im umgekehrten Fall, dass p zwar d, nicht aber c teilt, hat man

$$S_2(p;c,d) = \sum_{\alpha=1}^{p-1} e\left(\frac{c\alpha}{p}\right) = -1,$$

so dass auch in diesem Fall die Aussage erfüllt ist. Ist schließlich weder c noch d ein Vielfaches von p, so nutzt man ein Resultat aus der algebraischen Geometrie, das auf Bombieri zurückgeht (siehe Chalk/Smith [3]):

Theorem 3. *Seien ψ und f Polynome in $\mathbb{F}_p[X,Y]$ mit $\deg \psi = d_1$, $\deg f = d_2$. Unter der Bedingung*

$$\begin{aligned}
&f(X,Y) \not\equiv a \ (mod\ \psi_1(X,Y)) \ in\ \mathbb{F}_p \\
&\qquad \text{für alle } a \in \mathbb{F}_p \text{ und für alle absolut irreduziblen } \psi_1|\psi \text{ in } \mathbb{F}_p
\end{aligned}$$

gilt

$$\Big|\sum_{\substack{x,y\in\mathbb{F}_p \\ \psi(x,y)=0}} e\left(\frac{f(x,y)}{p}\right)\Big| \leq (d_1^2 - 3d_1 + 2d_1d_2)p^{1/2} + d_1^2.$$

Setzt man nun $\psi(\alpha,\beta) = \alpha^s\beta \mp 1$ und $f(\alpha,\beta) = c\alpha + d\beta$, also $d_1 = s+1$, $d_2 = 1$, so ist die Bedingung erfüllt und der Satz gibt

$$\begin{aligned}
|S_2(p;c,d)| &\leq \big((s+1)^2 - 3(s+1) + 2(s+1)\cdot 1\big)\ p^{1/2} + (s+1)^2 \\
&\leq s(s+1)\, p^{1/2} + (s+1)^2 \\
&\leq s(s+1)\, p^{1/2} + (s+1)^2
\end{aligned}$$

und damit das gewünschte Ergebnis. $\square$

3.5 Fortsetzung der Auswertung

Nachdem wir nun Schranken an S_1 und S_2 gefunden haben, können wir mit der Auswertung von (16) fortfahren. Es bezeichne w das Produkt all jener Primfaktoren $r|u$, die genau einmal in der Primfaktorzerlegung von u vorkommen. Die Anwendung von Lemma 2(ii) produziert für jede Primzahl, die in w vorkommt, einen Faktor $s(s+1)$; im Produkt ergibt sich also

$$(s(s+1))^{\nu(w)} = d_{s(s+1)}(w) \ll w^{\epsilon},$$

wobei $d_k(n)$ wie üblich die verallgemeinerte Teilerfunktion bezeichnet.
Im Folgenden werden wir keine Sorgfalt bei den ϵ walten lassen, sondern alle beliebig kleinen Exponenten mit demselben Symbol bezeichnen.
Mit Lemma 2 und der trivialen Abschätzung

$$|S_2(p^f; c, d)| \le p^f$$

für $f \ge 2$ folgt, dass das Produkt der S_2 durch

$$\begin{aligned} \prod \left|S_2(r^f; c, d)\right| &\le Uw^{-1}\left(w^{1/2+\epsilon}(w;\gamma,\delta)^{1/2} + (s+1)^2\right) \\ &\ll Uw^{-1/2+\epsilon}(w;\gamma;\delta)^{1/2} \end{aligned}$$

beschränkt ist. Zusammengefasst erhält man also

$$|S(u, pq; \gamma, \delta)| \ll Q^2 U w^{-1/2+\epsilon}(w;\gamma;\delta)^{1/2}$$

und damit

$$|S| \ll Q^{-2}U^{-1}w^{-1/2+\epsilon}\sum_{\gamma,\delta}\vartheta_\gamma\varphi_\delta(w;\gamma;\delta)^{1/2}. \tag{17}$$

Mit den Schranken (13) und (14) und unter Betrachtung der Symmetrie der Abstandsfunktion erhält man für die Summe weiter

$$\begin{aligned} &\sum_{\gamma,\delta}\vartheta_\gamma\varphi_\delta(w;\gamma;\delta)^{1/2} \\ \ll\ & J^sK^{1-s}Uw^{1/2} + J^sK^{-s}Q^2U^2\sum_{1\le\gamma\le\frac{1}{2}upq}\gamma^{-1}(w;\gamma)^{1/2} \\ &+ KQ^2U\sum_{1\le\delta\le\frac{1}{2}upq}\delta^{-1}(w;\delta)^{1/2} + Q^4U^2\sum_{1\le\gamma,\delta\le\frac{1}{2}upq}(\gamma\delta)^{-1}(w;\gamma;\delta)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei sich der erste Term im Fall $\gamma \equiv \delta \equiv 0 \pmod{upq}$ ergibt, der zweite und dritte jeweils dann entstehen, wenn genau eine der beiden Variablen den Wert 0 annimmt, und der letzte schließlich im generischen Fall auftritt, wenn weder γ noch δ verschwindet. Um die so entstandenen Summen nun auszuwerten, betrachten wir als Muster etwa die erste über γ; mit derselben Vorgehensweise lassen sich auch die anderen beiden behandeln. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{1\le\gamma\le upq}(w;\gamma)^{1/2}\gamma^{-1} &\le \sum_{d|w} d^{1/2}\sum_{\substack{1\le\gamma\le upq\\ d|\gamma}}\gamma^{-1}\ll\sum_{d|w}d^{1/2}\sum_{\substack{e\\ 1\le de\le upq}}\frac{1}{de}\\ &\ll \sum_{d|w}d^{-1/2}\log x\ll d(w)\log x\ll w^\epsilon\log x.\end{aligned}$$

Setzt man diese Resultate in die Ungleichung (17) ein, so ergibt sich

$$|S| \ll J^sK^{1-s}Q^{-2}w^\epsilon+\left\{J^sK^{-s}U+K+Q^2U\right\}w^{-1/2+\epsilon}(\log x)^2.$$

Der Beitrag von S zu $N(U)$ berechnet sich nun mittels Summation über u. Zunächst gilt

$$\sum_{U<u\le 2U}w^\epsilon\ll\sum_{U<u\le 2U}u^\epsilon\ll U^{1+\epsilon}.$$

Sodann zerfällt u eindeutig in $u=wt$, wobei jeder Primfaktor in t mindestens zweimal vorkommt. Die Anzahl solcher quadratvoller $t\le z$ lässt sich leicht berechnen: Ist t quadratvoll, so lässt es sich schreiben als $t=a^2b^3$ mit (nicht notwendig teilerfremden) natürlichen Zahlen a und b. Damit erhält man

$$\sum_{a^2b^3\le z}1=\sum_{b\le z^{1/3}}\left\lfloor\sqrt{\frac{z}{b^3}}\right\rfloor\le z^{1/2}\sum_{b\le z^{1/3}}b^{-3/2}$$

und die Summe im letzten Term ist $O(1)$.
Für uns ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\sum_{U<u\le 2U}w^{-1/2+\epsilon} &\le \sum_{w\le 2U}w^{-1/2+\epsilon}\sum_{U<wt\le 2U}1\\ &\ll\sum_{w\le 2U}w^{-1/2+\epsilon}(U/w)^{1/2}\\ &\ll U^{1/2}\sum_{w\le 2U}w^{-1+\epsilon}\ll U^{1/2+\epsilon}.\end{aligned}$$

Insgesamt leistet der zweite Term in (9) unter Berücksichtigung von (5) einen Beitrag von

$$\begin{aligned}&\ll K^{1-s}J^sQ^{-2}U^{1+\epsilon}+J^sK^{-s}U^{\frac32+\epsilon}+KU^{\frac12+\epsilon}+U^{\frac32+\epsilon}Q^2\\ &\ll x^{1+\epsilon}K^{1-s}Q^{-2}+x^{\frac32+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s}+x^{\frac12+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K+x^{\frac32+\epsilon}J^{-\frac32 s}Q^2. \qquad (18)\end{aligned}$$

3.6 Abschluss des Beweises

Jetzt können wir die Ergebnisse aus (11) und (18) zusammenzusetzen, um dann durch geeignete Wahl der noch unbestimmten Parameter y und Q schließlich die gesuchte Schranke an

$$\sum_{n\leq x} E_s(n)E_s(n+1) - C_s x$$

zu finden. Zunächst einmal stellt man fest, dass $N(U)$ insgesamt durch

$$\begin{aligned}
&\ll K^{1-s}Q^{-1}x^{1+\epsilon} + x^{1+\epsilon}K^{1-s}Q^{-2} + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s} + x^{\frac{1}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K \\
&\quad + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{3}{2}s}Q^2 \\
&\ll x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{3}{2}s}Q^2 + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s} + x^{1+\epsilon}K^{1-s}Q^{-1} + x^{\frac{1}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K
\end{aligned}$$

beschränkt ist. Durch Vergleich des ersten mit dem dritten Term kommt man für Q auf die optimale Wahl

$$Q = x^{-\frac{1}{6}+\epsilon}J^{\frac{s}{2}}K^{-\frac{s-1}{3}} + (\log x)^2;$$

wegen $J \leq x^{1/s}$ genügt dies der Bedingung (8).

Mit $J \geq K$ und $JK \gg y$ gilt nun weiter

$$\begin{aligned}
N(U) &\ll x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{3}{2}s}(\log x)^2 + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s} + x^{\frac{7}{6}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-\frac{2(s-1)}{3}} \\
&\quad + x^{\frac{1}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K \\
&\ll x^{\frac{3}{2}+\epsilon}(JK)^{-\frac{3}{4}s} + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s} + x^{\frac{7}{6}+\epsilon}(JK)^{-\frac{7s-4}{12}} \\
&\ll x^{\frac{3}{2}+\epsilon}y^{-\frac{3}{4}s} + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s} + x^{\frac{7}{6}+\epsilon}y^{-\frac{7s-4}{12}};
\end{aligned}$$

hieraus folgt wegen (4) und (7) für die gesuchte Schranke

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leq x} E_s(n)E_s(n+1) - C_s x \\
&\ll y^{1+\epsilon} + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}y^{-\frac{3}{4}s} + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s} + x^{\frac{7}{6}+\epsilon}y^{-\frac{7s-4}{12}}.
\end{aligned}$$

Mit $y = x^{\frac{14}{7s+8}}$ sind der erste und der vierte Term in etwa gleich groß, damit ist obiger Ausdruck

$$\ll x^{\frac{14}{7s+8}+\epsilon} + x^{\frac{3}{2}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s}. \tag{19}$$

Im ersten Term ist also schon der gesuchte Fehler entstanden.

Um nun den Term $x^{\frac{2}{3}+\epsilon}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s}$ abzuschätzen, benutzen wir noch eine elementare Hilfsschranke für N:

Lemma 3. *Für*

$$N = \#\{(j,k,u,v);\ J < j \le 2J,\ K < k \le 2K,\ j^s u \pm 1 = k^s v \le x\}$$

gilt folgende Abschätzung:

$$N \ll x(J^{-s}K + (JK)^{1-s})(\log x)^{s-1}.$$

Proof. Es gilt

$$N = \sum_{K<k\le 2K} \sum_{u \le xJ^{-s}} \sum_{\substack{J<j\le 2J \\ j^s u \equiv \mp 1 \pmod{k^s}}} 1$$

Die Kongruenz $j^s u \equiv \mp 1 \pmod{k^s}$ lässt sich auswerten, indem man den Modul in seine Primpotenzen zerlegt und dann einen Satz über Kongruenzen modulo Primzahlpotenzen benutzt. Die Lösungsanzahl modulo k^s ergibt sich dann als das Produkt der Lösungsanzahlen modulo der einzelnen Primzahlpotenzen. Sei nun also ξ eine Lösung von $j^s u \pm 1 \equiv 0 \pmod{p^{t-1}}$ für eine Primzahl p und $t \ge 2$. Ist dann

$$\left.\frac{d}{dj}\right|_{j=\xi} (j^s u \pm 1) = \left(s\xi^{s-1}u\right) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

so lässt sich der Lösung ξ von $j^s u \pm 1 \equiv 0 \pmod{p^{t-1}}$ bijektiv eine Lösung ξ' von $j^s u \pm 1 \equiv 0 \pmod{p^t}$ zuordnen (siehe Hardy/Wright [4], Satz 123). Dies ist aber der Fall, denn da ξ die Gleichung $j^s u \pm 1 \equiv 0 \pmod{p}$ löst, gilt $u \equiv \mp \xi^{-s} \pmod{p}$. Weil nun nach Definition keines der $p \in \mathcal{P}$ durch u (und damit durch ξ) oder durch s teilbar ist, erhält man

$$s\xi^{s-1}u \equiv \mp s\xi^{s-1}\xi^{-s} \equiv \mp s\xi^{-1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Die Äquivalenzen $j^s u \pm 1 \equiv 0 \pmod{p^t}$ und $j^s u \pm 1 \equiv 0 \pmod{p}$ haben also dieselbe Lösungsanzahl, die nach einem Satz von Lagrange nach oben durch den Grad s des Polynoms beschränkt ist. Damit besitzt die Kongruenz $j^s u \equiv \mp 1 \pmod{k^s}$ höchstens $s^{\nu(k)} \ll d_s(k)$ Lösungen. Insgesamt erhält man also

$$\begin{aligned} N &\ll \sum_{K<k\le 2K} \sum_{u \le xJ^{-s}} \min\left(d_s(k),\ JK^{-s}\right) \\ &\ll xJ^{-s}(1 + JK^{-s}) \sum_{K<k\le 2K} d_s(k) \\ &\ll x(J^{-s}K + (JK)^{1-s})(\log x)^{s-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Da jetzt N sowohl durch (19) als auch durch den in Lemma 3 gegebenen Ausdruck beschränkt wird, gilt es nun, nachzuweisen, dass alle dort auftretenden Terme in J und K durch den schon gefundenen Term $x^{\frac{14}{7s+8}+\epsilon}$ dominiert werden. Offensichtlich ist

$$\min(xKJ^{-s}, x^{\frac{3}{2}}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s}) \quad \leq \quad (xKJ^{-s})^{\lambda}(x^{\frac{3}{2}}J^{-\frac{s}{2}}K^{-s})^{1-\lambda}$$

für jedes $\lambda \in [0,1]$. Wählt man nun $\lambda = \frac{s}{2+3s}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&= \quad x^{\frac{s}{2+3s}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{s}{2+3s}\right)+\epsilon}(JK)^{\frac{s}{2+3s}-s\left(1-\frac{s}{2+3s}\right)} \\
&\ll \quad x^{\frac{s}{2+3s}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{s}{2+3s}\right)+\epsilon}y^{\frac{s}{2+3s}-s\left(1-\frac{s}{2+3s}\right)} \\
&\ll \quad x^{\frac{s}{2+3s}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{s}{2+3s}\right)+\left(\frac{14}{7s+8}\right)\left(\frac{s}{2+3s}-s\left(1-\frac{s}{2+3s}\right)\right)+\epsilon} \\
&\ll \quad x^{\frac{39s+24}{21s^2+38s+16}+\epsilon},
\end{aligned}$$

wobei wieder $J \geq K$ und $JK \ll y$ benutzt wurden. Weil nun für alle natürlichen Zahlen s der hier auftretende Exponent $\frac{39s+24}{21s^2+38s+16} < \frac{14}{7s+8}$ ist, folgt die Aussage des Satzes.

Bemerkung. Schon die Hilfsschranke in Lemma 3 präzisiert den Fehlerterm in (1) von Carlitz [2]: Mit nur wenig mehr Mühe findet man (4) mit $O(y \log x)$ statt $y^{1+\epsilon}$ im Fehler. Wählt man nun $J \geq K$ und $JK \gg y$ im Lemma, so kommt man auf $N \ll xy^{\frac{1-s}{2}}(\log x)^{s-1}$, woraus mit der Wahl $y = x^{\frac{2}{s+1}}$ Satz 1 mit einem Fehlerterm von $O\left(x^{\frac{2}{s+1}}(\log x)^3\right)$ folgt. Unsere Verbesserung rührt in erster Linie daher, dass wir in Lemma 2(ii) gegenüber der trivialen Abschätzung eine Größenordnung $p^{1/2}$ einsparen konnten, wobei allerdings pro Primteiler eine Konstante $h(s)$ dazukommt. Dies rechnet sich in den Faktor $d_{h(s)}(w)w^{-1/2}$ um, was in der Summation über u letztlich auf eine Ersparnis von $U^{1/2}$ unter Verlust einiger Logarithmuspotenzen führt. Die jeweiligen Wahlen von Q und y geben dann die Verbesserung um $O\left(x^{\frac{1}{s^2}}\right)$ gegenüber dem alten Resultat.

Literatur

[1] Brüdern, J.: Einführung in die analytische Zahlentheorie. Berlin, 1995.

[2] Carlitz, L.: *On a problem in additive arithmetic (II).* Quart. J. Math. Oxford Ser. 3 (1932), S. 273-290.

[3] Chalk, J.H.H., Smith, R.A.: *On Bombieri's estimate for exponential sums.* Acta arithm. XVIII (1971), S. 191-212.

[4] Hardy, G. H., Wright, E.M.: Einführung in die Zahlentheorie. München, 1958.

[5] Heath-Brown, R.: *The Square Sieve and Consecutive Square-Free Numbers.* Math. Ann. 266 (1984), S. 251-259.

[6] Pappalardi, F.: *A survey on k-freeness.* Proceeding of the Conference in Analytic Number Theory in Honor of Prof. Subbarao at I.M.Sc. Chennai, Januar 2003.
Im Internet unter:
http://www.mat.uniroma3.it/users/pappa/papers/allahabad2003.pdf