



Simulering av stokastiska fält på sfären

Simulation of Gaussian Random Fields on the Sphere

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs universitet

Kandidatarbete inom civilingenjörsutbildningen vid Chalmers

Simon Lindeberg Skoglund

Selma Moqvist

Simulering av stokastiska fält på sfären

Examensarbete för kandidatexamen i matematisk statistik vid Göteborgs universitet

Simon Lindeberg Skoglund

Kandidatarbete i matematik inom civilingenjörsprogrammet Teknisk matematik vid Chalmers

Selma Moqvist

Handledare:

David Cohen

Annika Lang

Institutionen för Matematiska vetenskaper

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

GÖTEBORGS UNIVERSITET

Göteborg, Sverige 2022

Förord

Följande kandidatrapport har skrivits av två av gruppens medlemmar; Simon Lindeberg Skoglund, som studerar på Göteborgs universitet och Selma Moqvist, som är student på Chalmers tekniska högskola. Vi kommer också referera till arbeten av gruppens övriga medlemmar; Christoffer Cronhamn och Kristoffer Westlund, som studerar på Göteborgs universitet. Särskilt gäller denna programkod skriven av Kristoffer Westlund som använts i stora delar av arbetet. Därför väljer vi att hänvisa till honom i där det finns skäl att göra så. Han har dock inte skrivit denna rapport och står inte för vad som sägs härnäst. Gruppens handledare har varit David Cohen och Annika Lang.

Avsnitt	Skrivet av	Reviderad av
Förord	Selma	Simon
Populärvetenskaplig presentation	Selma	Simon
Sammandrag/Abstract	Simon	Selma
1	Simon	Selma
2	Selma	Simon
3	Simon	Selma
4	Selma	Simon
5	Selma	Simon
6	Selma	Simon
7	Selma	Simon
8	Selma	Simon
9	Selma & Simon	Selma & Simon
10	Selma & Simon	Selma & Simon
11	Selma & Simon	Selma & Simon
12	Selma & Simon	Selma & Simon
Appendix	Selma & Simon	Selma & Simon
Kod för avsnitt 10	Selma	Simon

Tabell 1: Huvudförfattare i varje avsnitt

I tabell [1](#) anges varje avsnitts huvudförfattare. För koden av Algoritm 1, 2 och 3, samt den kod som använts för att generera grafiken i rapportens populärvetenskapliga presentation, avsnitt [5](#), [9.4](#) och [11](#) hänvisar vi till Cronhamn & Westlund [[1](#)]. Selma och Simon, som skrivit föreliggande rapport, har tillsammans bidragit med diskussioner och hjälpt varandra med rapportens olika delar när problem uppstått. Mer ingående information gällande vem som bidragit med vad hittas i projektets dagbok och i den tidslogg som förts. Vi vill tacka våra handledare Annika och David som hjälpt oss och lärt oss mycket om ämnet under projektets gång. Vi vill även tacka gruppens examinatorer Ulla Dinger och Maria Roginskaya för det stöd vi fått under det avslutande arbetet med rapporten.

Göteborg, maj 2022,

Christoffer Cronhamn, Simon Lindeberg Skoglund, Selma Moqvist och Kristoffer Westlund.

Populärvetenskaplig presentation

Något många tänker på när man säger ordet "sannolikhet" är de klassiska exemplen med en tärning som kastas eller kort som dras ur en kortlek. Vilken är chansen att du slår en trea med en sexsidig tärning? Svaret är enkelt. Tärningen har sex sidor och endast en av dem visar en trea, då blir sannolikheten en sjättedel. Men vilken är då chansen att nästa slag med tärningen även det ger en trea? Självklart ändras inte sannolikheten - svaret är fortfarande en sjättedel.

Sannolikhetsteori är den matematiska lära som handlar om att beskriva och räkna på slumpmässiga händelser. I exemplet med tärningen ovan räknar vi på en oberoende händelse, där värdet av nästa kast inte är beroende av föregående kast. Matematikerna begränsade sig länge till denna typ av sinsemellan oberoende händelser. Det var först i början av 1900-talet man började studera och räkna på problem där sannolikheterna beror av varandra. Anta att du drar ett kort ur en kortlek. När du gör det förändrar du antalet kort och sannolikheten för att du ska dra samma valör igen ändras. Värdet på nästa kort beror alltså av det redan dragna kortet, det är en beroende händelse.

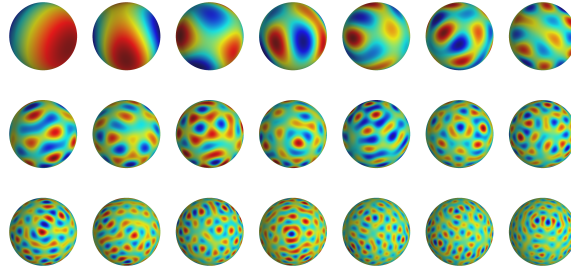
Modeller baserade på sannolikhet är naturligtvis inte bara användbara när man spelar kort eller tärning. Inom naturvetenskapen används sådana modeller för att studera en rad olika komplexa fenomen och beroende händelser är en viktig del i dessa modeller. Det kan tyckas konstigt att använda modeller baserade på sannolikhet när vi studerar konkreta fenomen som beror av fysikaliska lagar. Dock är dessa modeller användbara för att förstå betydligt mer avancerade fenomen. På samma sätt som tärningen och kortleken kan beskrivas med sannolikheter, kan vi även för många fysikaliska problem använda sannolikhetsbaserade modeller för att bygga en djupare förståelse. Detta är särskilt användbart när våra problem ökar i komplexitet.

Studiet av den kosmiska bakgrundsstrålningen är ett exempel på hur man kan dra nytta av modeller baserade på sannolikhet för att skapa ordning i kaoset. Den kosmiska bakgrundsstrålningen är en rest från den tid då universum var betydligt varmare och mer kompakt. Därför ger den oss en möjlighet att göra antaganden om hur universum såg ut i sin begynnelse. Under 1900- och 2000-talen har man, med markbyggda forskningsstationer, ballonger och på senare tid satelliter, gjort mätningar av temperaturen för att studera den kosmiska bakgrundsstrålningen.

Från all mätdata och från fysikaliska principer kan man tolka den kosmiska bakgrundsstrålningen som resultatet av en händelse. Det fungerar som för "ett tärningskast" eller utfall, där universum inte bara antar ett värde mellan ett och sex. Istället kan alla punkter vi ser runt omkring oss anta olika värden (kvantifierade av temperaturen). Problemet blir därmed mer hanterbart, men det är fortfarande komplext. Hur fluktuerar strålningen i universum? Hur beror strålningen i en del av universum av strålningen i en annan?

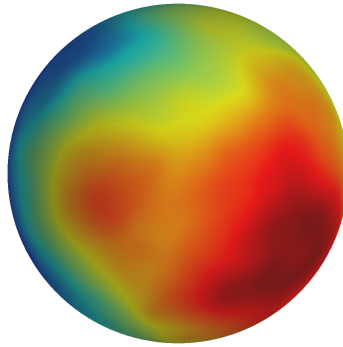
Ett av de objekt inom sannolikhetsteorin som kan användas för att modellera den kosmiska bakgrundsstrålning är så kallade stokastiska (slumpmässiga) fält. Det är dessa vi simulerat i vårt arbete. Flera av de metoder vi använt bygger på det arbete som Kari Karhunen och Michel Loève utförde under 1940-talet. Oberoende av varandra tog de fram en metod för att representera ett stokastiskt fält som en summa av oändligt många små bidrag. Metoden har under åren utvecklats och idag är det möjligt att använda denna teoretiska grund för att simulera fluktuationer i den kosmiska bakgrundsstrålning vi tidigare nämnde.

I vårt projekt har vi utgått från denna teoretiska grund och ett fält (i detta fall en mängd slumpade variabler) på en sfär. Vi använder Karhunen och Loèves idé för att dela upp fältet i många små delar och sedan simulera alla dessa separat. Varje del ger oss en “bild” och genom att summera dessa “bilder” får vi det totala fältet på sfären. I figur 1 ser vi hur varje separat bild ser ut.



Figur 1: Figuren hänvisas till [1].

För varje ny sfär adderas värdet på dess fält till den totala summan. Genom att summera alla små bidrag får vi bilder likt den i figur 2.



Figur 2: Figuren hänvisas till [1].

Beskrivningen ovan är dock en sanning med modifikation, då vi behöver ett oändligt antal delar för att simulera ett fullständigt fält. Om vi använder tillräckligt många delar blir emellertid resultatet en tillräckligt god approximation. Vi har därför med numeriska simuleringar undersökt hur vi ska addera dessa delar för att ett simulerat fält ska bli en tillräckligt god approximation av det faktiska fältet.

Sammandrag

Rapporten behandlar studiet av isotropiskt gaussiskt stokastiska fält (iGRF) på enhetssfären. Rapporten inleds med en presentation av den teoretiska bakgrund som behövs för att förstå Karhunen-Loève-expansionen för ett iGRF på sfären. Med den nämnda serieexpansionen kan ett iGRF utvecklas som en oändlig summa av klotytefunktioner och stokastiska koefficienter. Från fältets Karhunen-Loève-expansion hittas ett uttryck för ett approximativt iGRF på sfären. Det uttrycket trunkeas till en finit summa av κ termer och används sedan i tre olika algoritmer (utvecklade i **MATLAB**) för att simulera ett iGRF på sfären. Eftersom fältet är approximativt fås en felterm från den trunkeade serien. Därför presenteras en sats och ett korollarium som visar på konvergensen hos det fält vi sedan simulerar. Dessa konvergensresultat bekräftas med hjälp av numeriska metoder så som maxmetoden, mittpunktsmetoden och Monte Carlo-metoden. Dessutom analyseras tidkomplexiteten hos de olika algoritmerna, där slutsatsen blir att den algoritm som kallas Algoritm 3 är den mest tidseffektiva.

Abstract

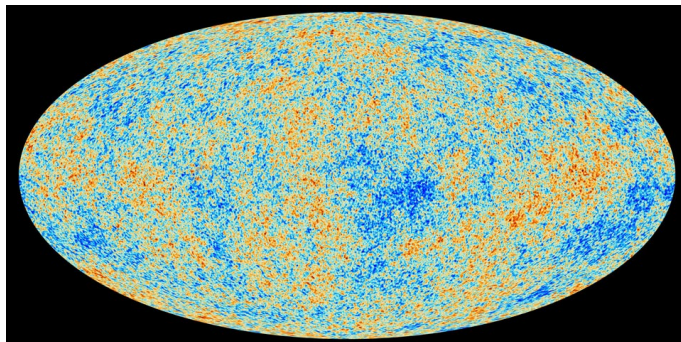
This thesis deals with the study of isotropic Gaussian random fields (iGRF) on the unit sphere. The report begins with a presentation of the theoretical background required to understand the Karhunen-Loève expansion for an iGRF on the sphere. Using the series expansion, it is possible to expand an iGRF as an infinite sum of spherical harmonic functions and stochastic coefficients. From the Karhunen-Loève expansion of the iGRF, an approximated expression is found. The field is truncated to a finite sum of κ terms and is used in three different algorithms (developed in **MATLAB**) in order to simulate an iGRF on the sphere. Since the field is an approximation, an error arises from the truncated series expansion. Hence, a theorem and a corollary that show the convergence of the simulated iGRF are presented. The results regarding the convergence are confirmed numerically using the midpoint method, a maximum over the grid points and the Monte Carlo method. Moreover, the time complexity of the algorithms was analysed, with the conclusion that the algorithm called Algorithm 3 is the most time efficient.

Innehåll

1	Inledning	1
2	Inledande teori	1
3	Isotropiskt gaussiskt stokastiska fält, iGRF	2
4	L^2 och andra relevanta rum	3
5	Klotytefunktionerna	4
6	Karhunen-Loève-expansionen för iGRF på $\mathbb{S}^2$	5
7	Approximering av iGRF på $\mathbb{S}^2$	7
8	Trunkering av fältet	8
9	De tre algoritmerna	9
9.1	Algoritm 1 & sfäriska koordinater	9
9.2	Vektorisering	9
9.3	Algoritm 2	10
9.4	Algoritm 3	10
9.5	Det simulerade iGRF:et på $\mathbb{S}^2$	10
10	Komplexitet och exekveringstider hos algoritmerna	11
10.1	Ordo-notation ($\mathcal{O}$)	11
10.2	Komplexitet och exekveringstider	11
10.3	Konstant upplösning	13
10.4	Konstant κ	14
11	Konvergens i L^2 och simuleringar av trunkeringsfelet	15
11.1	Fel i $L^2(\mathbb{S}^2)$	15
11.2	Fel i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$	16
12	Sammanfattning & avslutande ord	17
A	Appendix	18
A.1	Tillhörande mätdata för figur 6, 7, 8 och 9	18
A.1.1	Algoritm 1 för $\alpha = 3$, konstanta kappan	18
A.1.2	Algoritm 1 för $\alpha = 5$, konstanta kappan	19
A.1.3	Algoritm 2 för $\alpha = 3$, konstanta kappan	19
A.1.4	Algoritm 2 för $\alpha = 5$, konstanta kappan	20
A.1.5	Algoritm 3 för $\alpha = 3$, konstanta kappan	20
A.1.6	Algoritm 3 för $\alpha = 5$, konstanta kappan	21
A.2	Programkod	22

1 Inledning

Studiet av isotropiskt gaussiskt stokastiska fält (framöver benämnt som iGRF) är aktuellt då studier av iGRF på sfären kan kopplas till forskning kring den kosmiska bakgrundsstrålningen [2, s. 3-7]. Den kosmiska bakgrundsstrålningen kan ses som ett stokastiskt fält, där mycket tyder på att fluktuationer i fältet är gaussiskt fördelade [2, s. 6]. I figur 3 nedan ser vi en bild av den kartlagda kosmiska bakgrundsstrålningen.



Figur 3: European Space Agency (ESA) körde Planck-satelliten för att kartlägga den kosmiska bakgrundsstrålningen [3].

Den kosmiska bakgrundsstrålningen är endast ett applikationsområde, men det ger en relevans till simuleringar av stokastiska fält på sfären. Det är dock inte möjligt att simulera ett iGRF på sfären utan att först ta fram ett approximativt uttryck för fältet. Därför är det ytterst relevant med den approximation av iGRF:et som härletts i [4] och som presenteras i följande rapport.

Syftet med rapporten är att introducera läsaren till den bakomliggande teori som krävs för att förstå hur ett iGRF kan simuleras över enhetssfären. Vi presenterar tre olika algoritmer och därefter visas de simulerade fälten. Rapporten syftar även till att förklara de skillnader som föreligger mellan algoritmerna och därför utförs en komplexitetsanalys för var och en av dem. Till sist visar vi på en begränsning av det fel som uppstår ur approximationen.

Målet med rapporten är att förklara de simulerade resultaten så att de kan förstås av en läsare som studerar en teknisk utbildning på universitetsnivå. Vi förutsätter grundläggande förståelse av begreppen sannolikhet, stokastiska variabler och stokastiska processer samt att läsaren har förkunskaper i programmeringsspråket MATLAB. I arbetet har vi använt artikeln av *Isotropic Gaussian random fields on the sphere: regularity, fast simulation and stochastic partial differential equations* [4] Lang & Schwab som vår huvudsakliga referens.

Rapporten är disponerad enligt följande struktur. Avsnitt 2 introducerar läsaren till de begrepp och grundläggande definitioner som krävs för att tillägna sig rapporten. Därefter tar vi i avsnitt 3-6 upp de huvudsakliga teoretiska delmoment som krävs för att kunna förstå uttrycket för det approximerade iGRF:et. I avsnitt 7 presenteras vidare det approximativa uttryck vi senare simulerar och i avsnitt 8 trunkerar vi uttrycket för att sedan visa på konvergens av fältet. Avsnitten 9-11 behandlar de tre algoritmerna, de simulerade resultaten, tidskomplexiteten i algoritmerna samt numeriska resultat av trunkeringsfelet från avsnitt 8. Vi avslutar i avsnitt 12 rapporten med en kort sammanfattning av de huvudsakliga resultaten.

2 Inledande teori

Vi inleder avsnittet med en introduktion till den teori som krävs för att förstå de simuleringar som utförs i avsnitt 9. Vi introducerar också flera av de beteckningar som kommer att användas framöver.

För att arbeta med iGRF på sfären behöver vi känna till begreppet måttrum, och därför är det en fördel om läsaren har grundläggande kännedom om sådana. Med måttrum avser vi den trippel som består av en mängd D , en σ -algebra och ett mått. Särskilt viktiga är Lebesguemåttet, det speciella måttrum som kallas för sannolikhetsrummet och Borels σ -algebra $\mathcal{B}(D)$.

Vi kommer framöver beteckna ett generellt måttrum med $(D, \mathcal{A}, \nu)$, där D är en mängd, $\mathcal{A}$ en σ -algebra och ν ett mått [5]. För en mätbar funktion f på D skriver vi den generella integralen med avseende på ett mått ν som

$$\int_D f(x) d\nu(x) = \int_D f d\nu,$$

där vänsterledet används om det finns skäl att vara extra tydlig [5].

Då de simuleringar vi senare presenterar i avsnitt 9 är utförda över enhetssfären $\mathbb{S}^2$ måste även denna introduceras. Vi låter enhetssfären ges, enligt [4, s. 3049], av

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\},$$

där normen ovan är det euklidiska avståndet i $\mathbb{R}^3$.

Vi låter därefter $\mathbb{S}^2$, den tillhörande Borel σ -algebran $\mathcal{B}(\mathbb{S}^2)$ och Lebesguemåttet σ utgöra måttrummet $(\mathbb{S}^2, \mathcal{B}(\mathbb{S}^2), \sigma)$ på samma sätt som görs i [4, s. 3049]. Som bekant gäller det för kartesiska punkter $y \in \mathbb{S}^2$ att vi kan representera dem i sfäriska koordinater. Vi betecknar dessa enligt nedan, så att

$$y = (\sin(\vartheta) \cos(\varphi), \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \cos(\vartheta)),$$

där $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ och ϑ är polvinkeln och φ är azimut. Det gäller då för Lebesguemåttet, enligt [4], att

$$d\sigma(y) = \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi.$$

För att förstå och ta fram det uttryck som senare simuleras måste läsaren vara bekant med Hilbertrum och dess generella egenskaper. Mer specifikt använder vi den egenskap som låter en funktion f i Hilbertrummet H uttryckas som en linjärkombinationen

$$f = c_0 e_0 + c_1 e_1 + \dots, \text{ där } c_i = \langle f, e_i \rangle_H,$$

där $\langle f, e_i \rangle_H$ betecknar den inre produkten i H , när H spänns upp av en ortonormal (men inte nödvändigtvis uppräknelig) bas $e_0, e_1, e_2, \dots, e_i$.

Till sist noterar vi att vi i kommande avsnitt använder Kroneckerdeltat för att med en kortare notation beskriva ortonormaliteten mellan två element. Om exempelvis e_i, e_j är ortonormala i Hilbertrummet H , skrivs det som $\langle e_i, e_j \rangle_H = \delta_i^j$, där δ_i^j är Kroneckerdeltat. Kroneckerdeltat ges av

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j, \end{cases}$$

där i och j är två summerbara index [6].

3 Isotropiskt gaussiskt stokastiska fält, iGRF

Det fullständiga sannolikhetsrum som framöver används låter vi betecknas av $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, där vi (relaterat till hur vi tidigare beskrev det generella måttrummet) låter Ω vara den underliggande mängden, $\mathcal{F}$ en σ -algebra och $\mathbb{P}$ ett sannolikhetsmått. Vi kommer i flera definitioner framöver kommer säga att en händelse $A \in \mathcal{F}$ inträffar $\mathbb{P}$ -nästan säkert. Detta innebär att det för händelsen gäller att $\mathbb{P}(A) = 1$. Definitionerna 3.1, 3.2 och 3.3 nedan bygger på definition 2.1 i [4].

Förståelsen av stokastiska fält innebär att vi är förtrogna med stokastiska variabler och begrepp som varians, kovarians och väntevärde. En reell stokastisk variabel i sannolikhetsrummet Ω är en mätbar funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (dess värdemängd är de reella talen). Vi förväntar oss att läsaren är bekant med begreppen varians och väntevärde, men påminner om att variansen för en stokastisk variabel X betecknas med $\text{Var}(X)$ och väntevärdet med $\mathbb{E}(X)$.

För en sekvens av stokastiska händelser under ett tidsintervall kan man analysera vad som kallas stokastiska processer. I följande rapport intresserar vi oss för stokastiska händelser med avseende på det underliggande rummet, alltså sfären $\mathbb{S}^2$. Vi analyserar så kallat stokastiska fält.

Definition 3.1 (Stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$). Ett reellt stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$ är en $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{S}^2)$ -mätbar funktion $T : \Omega \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Vi kan alltså se reella stokastiska fält T på $\mathbb{S}^2$ som en familj $\{T(y) : y \in \mathbb{S}^2\}$ av reella stokastiska variabler $T(y)$. Gällande våra simuleringar har de reella stokastiska fält vi arbetat med väldigt speciella egenskaper, vilka beskrivs i definitionerna 3.2 och 3.3 nedan.

Definition 3.2. Ett reellt stokastiskt fält T på $\mathbb{S}^2$ är *gaussiskt* om det för varje $k \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{S}^2$ gäller att den reella, flerdimensionella, stokastiska variabeln $(T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_k))$ är flerdimensionellt gaussiskt fördelad. Det är ekvivalent med att $\sum_{i=1}^k c_i T(x_i)$ är en normalfördelad stokastisk variabel för alla $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$.

Fälten är alltså *gaussiskt fördelade*. Nästa intressanta egenskap hos fälten är något som kallas *isotropi*, vilket innebär att ett fält i någon mening är invariant med avseende på rotationer. Om vi roterar en sfär 180° i någon riktning och en annan sfär 90° i en annan riktning kommer vi på grund av dess isotropi inte se någon skillnad mellan dem; sfären är likformig i alla riktningar. Gruppen av alla rotationer på sfären $\mathbb{S}^2$ skriver vi som $\text{SO}(3)$. Mer rigoröst definieras isotropin för ett reellt stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$ enligt definition 3.3 nedan.

Definition 3.3 (Isotropi). Ett reellt stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$ är

1. *starkt isotropiskt* om det för alla $k \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{S}^2$ och $g \in \text{SO}(3)$ gäller att $(T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_k)) = (T(gx_1), T(gx_2), \dots, T(gx_k))$ i lag.
2. *n-svagt isotropiskt* för $n \geq 2$ om $\mathbb{E}(|T(x)|^n) < +\infty$ för alla $x \in \mathbb{S}^2$ och om det för $1 \leq k \leq n$ och $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{S}^2$ och $g \in \text{SO}(3)$ gäller att $\mathbb{E}(T(x_1)T(x_2) \dots T(x_k)) = \mathbb{E}(T(gx_1)T(gx_2) \dots T(gx_k))$.

Om vi har en realisation av ett starkt isotropiskt, stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$, så innebär definition 3.3 för stark isotropi att vi kan förvänta oss samma typ av "mönster" över hela $\mathbb{S}^2$. Gällande den kosmiska bakgrundsstrålningen, tolkad som en realisation av ett isotropiskt, stokastiskt fält, så är den underliggande isotropin en konsekvens av att universum (vid tillräckligt stora avstånd) ser likadant ut i alla riktningar [2].

Ett starkt isotropiskt, stokastiskt fält T på $\mathbb{S}^2$ som uppfyller $\mathbb{E}((T(x))^2) < \infty$ för alla $x \in \mathbb{S}^2$ är också 2-svagt isotropiskt [2]. Den omvända implikationen gäller dock inte allmänt. Enligt proposition 2.2 i [4] gäller att om T är gaussiskt, så är T också starkt isotropiskt om och endast om T är 2-svagt isotropiskt. De fält vi simulerar är 2-svagt isotropiskt gaussiskt stokastiska fält. Därför är det fullt motiverat att kalla dem för isotropiskt gaussiskt stokastiska fält eller iGRF (på $\mathbb{S}^2$).

4 L^2 och andra relevanta rum

Vi kommer nu presentera några av de inre produktrum som syns mycket i nästkommande avsnitt. Ett flertal av rapportens definitioner, satser och lemmen använder sig av dem. Därför är det dessa rum som i slutändan hjälper till att bygga upp det approximerade fält vi simulerat.

Vi använder oss av ett funktionsrum, mer specifikt L^2 -rummet (eller rummet av kvadratisk integrerbara funktioner). Den generella definitionen för L^2 -rummet ges enligt Lord, Powell & Shardlow [7]:

Definition 4.1. Låt $(D, \mathcal{A}, \nu)$ vara ett mätbart rum, och H ett Hilbertrum. Rummet $L^2(D; H)$ definieras som mängden av alla $\mathcal{A}$ -mätbara funktioner $f : D \rightarrow H$ så att $\|f\|_{L^2(D; H)} < \infty$, där normen för funktioner $f \in L^2(D; H)$ ges av den inre produkten

$$\|f\|_{L^2(D; H)} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2(D; H)}}.$$

Den inre produkten för två funktioner $f, g \in L^2(D; H)$ definieras i sin tur med den inre produkten i H . Det gäller att

$$\langle f, g \rangle_{L^2(D; H)} := \int_D \langle f(x), g(x) \rangle_H d\nu(x).$$

Om vi använder de reella talen $\mathbb{R}$ som Hilbertrummet H i definition 4.1 ovan skriver vi $L^2(D)$ istället för $L^2(D; \mathbb{R})$.

I rapporten använder vi tre olika L^2 -rum. Det första kallar vi rummet av alla reella, kvadratiskt integrerbara, stokastiska variabler. Vi låter exempel 4.1 nedan visa hur rummet definieras.

Exempel 4.1. Låt sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vara det mätbara rummet och mängden av alla reella tal $\mathbb{R}$ vara vårt Hilbertrum H . Då kan vi enligt definition 4.1 ovan konstruera $L^2(\Omega)$. Detta är rummet av alla reella, kvadratiskt integrerbara, stokastiska variabler $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Värt att notera angående exempel 4.1 är att vi för $X, Y \in L^2(\Omega)$ har att

$$\langle X, Y \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \langle X(\omega), Y(\omega) \rangle_{\mathbb{R}} d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} X(\omega)Y(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(XY).$$

Därför använder vi generellt notationen för väntevärdet istället för integralnotation när vi beskriver den inre produkten på $L^2(\Omega)$. Vi säger dessutom att en följd av reellvärda stokastiska variabler $(X_n, n \in \mathbb{N})$ konvergerar mot X i $L^2(\Omega)$ om

$$\mathbb{E}((X_n - X)^2) \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

För att i framtiden ha möjlighet att konstruera ett rum för funktionsvärda stokastiska variabler på $\mathbb{S}^2$ måste vi först studera det rum som byggs upp av mängden av alla reella kvadratiskt integrerbara $\mathcal{B}(\mathbb{S}^2)$ -mätbara funktioner. Rummet vi söker kallas $L^2(\mathbb{S}^2)$ och illustreras mer noggrant i exempel 4.2 nedan.

Exempel 4.2. Rummet $L^2(\mathbb{S}^2)$ består av mängden av alla reella, kvadratiskt integrerbara, $\mathcal{B}(\mathbb{S}^2)$ -mätbara funktioner $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Den inre produkten definieras som

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} = \int_{\mathbb{S}^2} f(x)g(x) d\sigma(x), \quad f, g \in L^2(\mathbb{S}^2).$$

Enligt [7] är alla kvadratiskt integrerbara rum $L^2(D; H)$ också Hilbertrum H . Vi använder därför dessa för att konstruera nya L^2 -rum. Vi kan till slut, enligt exempel 4.3 nedan, skapa det tredje och sista rum som behövs för arbetet. Detta är det L^2 -rum som spänns upp av funktionsvärda stokastiska variabler på $\mathbb{S}^2$ eller, med andra ord, reella stokastiska fält på $\mathbb{S}^2$.

Exempel 4.3. Med sannolikhetsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ och Hilbertrummet $L^2(\mathbb{S}^2)$ konstruerar vi $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$. Den inre produkten för två element $T, S \in L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ blir enligt definition 4.1:

$$\begin{aligned} \langle T, S \rangle_{L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))} &= \int_{\Omega} \langle T(\omega), S(\omega) \rangle_{L^2(\mathbb{S}^2)} d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{S}^2} T(\omega, x)S(\omega, x) d\sigma(x) \right) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{S}^2} T(x)S(x) d\sigma(x) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Elementen i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ är funktionsvärda stokastiska variabler på $\mathbb{S}^2$, eller som tidigare sagts, reella stokastiska fält på $\mathbb{S}^2$. Speciellt gäller det att ett iGRF på $\mathbb{S}^2$ är en del av $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ [4].

5 Klotytefunktionerna

I detta avsnitt introducerar vi klotytefunktionerna (eng. Spherical Harmonics). Det är värt att redan nu notera hur följande avsnitt till stor del bygger på avsnitt 2 i Lang & Schwab [4]. Då mycket av den bakomliggande teorin är komplex, nämner vi endast de definitioner som krävs för att förstå hur ett iGRF kan simuleras på $\mathbb{S}^2$. För vidare läsning hänvisar vi till [4].

Målet är alltså att bygga förståelse för hur de iGRF vi beskrivit kan simuleras. För simuleringarna skriver vi om fältet som en summa av oändligt många deltermer, så kallade basfunktioner och stokastiska koefficienter. Närmare beskrivningar av hur denna uppdelning görs finns i avsnitt 6, men innan vi kan gå vidare måste vi först definiera de så kallade klotytefunktionerna. Vi kommer i senare avsnitt se hur dessa fungerar som de basfunktioner det uppdelade iGRF:et skrivs i termer av.

Klotytefunktionerna definieras genom att använda (de ortogonala) Legendrepolynomerna (P_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}_0$). Dessa ges av Rodrigues formel. Det gäller att

$$P_\ell(\tau) := 2^{-\ell} \frac{1}{\ell!} \frac{\partial^\ell}{\partial \tau^\ell} (\tau^2 - 1)^\ell$$

för alla $\ell \in \mathbb{N}_0$, där $\tau \in [-1, 1]$.

På samma sätt som i [4], definierar vi Legendrepolynomens associerade Legendrefunktioner ($P_{\ell m}$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m = 0, \dots, \ell$) genom:

$$P_{\ell m}(\tau) := (-1)^m (1 - \tau^2)^{m/2} \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} P_\ell(\tau), \quad (2)$$

för $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m = 0, \dots, \ell$ och $\tau \in [-1, 1]$.

Slutligen definierar vi klotytefunktionerna som i [4].

Definition 5.1 (Klotytefunktionerna). Klotytefunktionerna $Y_{\ell m} : [0, \pi] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ ges av

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) := \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_{\ell m}(\cos \vartheta) \exp(im\varphi), \quad (3)$$

för $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m = 0, 1, \dots, \ell$ och $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. För $\ell \in \mathbb{N}$, $m = -\ell, \dots, -1$ ges klotytenfunktionerna av sambandet:

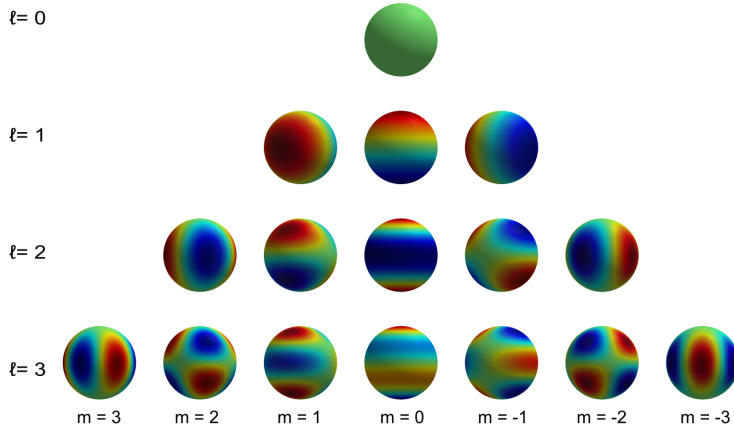
$$Y_{\ell m} = (-1)^m \overline{Y_{\ell - m}}. \quad (4)$$

I samband (4) ovan betecknar $\overline{Y_{\ell - m}}$ komplexkonjugatet av $Y_{\ell - m}$. Då klotytefunktionerna är definierade för sfäriska koordinater, kommer vi framöver att växla mellan notationen för hur vi definierade klotytefunktionerna i definition 5.1 ovan och

$$Y_{\ell m}(y) := Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi),$$

för $y \in \mathbb{S}^2$, där $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m = 0, 1, \dots, \ell$.

Figur 4 nedan visar de första klotytefunktionerna illustrerade på sfären $\mathbb{S}^2$.



Figur 4: De första klotytefunktionerna, ℓ på y -axeln och m på x -axeln. Figuren hänvisas till [1].

6 Karhunen-Loève-expansionen för iGRF på $\mathbb{S}^2$

Vi är nu redo att introducera Karhunen-Loève-expansionen för ett isotropiskt stokastiskt fält på enhetssfären $\mathbb{S}^2$. Detta är en typ av serieexpansion, alltså en oändlig summa som låter oss uttrycka en avbildning i separata termer. Karhunen-Loève-expansionen är den serieexpansion som låter oss expandera en stokastisk process i termer av stokastiska koefficienter och parvis ortogonala basvektorer. Eftersom vi arbetar med sfären $\mathbb{S}^2$, använder vi den version av Karhunen-Loève-expansionen som finns under namnet sats 2.3 i [4]. Satsen lyder som följer.

Sats 6.1. Om T är ett isotropiskt stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$ så gäller:

1. T uppfyller $\mathbb{P}$ -nästan säkert

$$\int_{\mathbb{S}^2} T(x)^2 d\sigma(x) < \infty. \quad (5)$$

2. T kan utvecklas till en Karhunen-Loève-expansion

$$T = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}, \quad (6)$$

med

$$a_{\ell m} = \int_{\mathbb{S}^2} T(y) \overline{Y_{\ell m}(y)} d\sigma(y), \quad (7)$$

för $\ell \in \mathbb{N}_0$ och $m \in \{-\ell, \dots, \ell\}$.

3. Serieexpansionen (6) konvergerar i $L^2(\Omega \times \mathbb{S}^2; \mathbb{R})$; alltså

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{S}^2} \left(T(y) - \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m} \right)^2 d\sigma(y) \right) = 0.$$

4. Serieexpansionen (6) konvergerar i $L^2(\Omega; \mathbb{R})$ för alla $x \in \mathbb{S}^2$; alltså för alla $x \in \mathbb{S}^2$ gäller det att

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left(T(x) - \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(x) \right)^2 \right) = 0.$$

Som framgår av sats 6.1 ovan kan det isotropiska fältet T utvecklas som en oändlig summa av koefficienter $a_{\ell m}$ och basvektorer $Y_{\ell m}$. Karhunen-Loève-expansionen av fältet T konvergerar i $L^2(\Omega; \mathbb{S}^2)$ och för alla $x \in \mathbb{S}^2$ konvergerar serien även i $L^2(\Omega; \mathbb{R})$. Resultatet innebär att varje 2-svagt isotropiskt stokastiskt fält ingår i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ och vi kan använda oss av expansionen i våra simuleringar. För bevis av sats 6.1 hänvisas läsaren till [4].

För att utveckla fältet med en Karhunen-Loève-expansion behöver vi dock ta fram uttryck för expansionens koefficienter och basvektorer. Vi börjar med koefficienterna och presenterar därför lemma 2.1 ur [4]. Lemmat innehåller även de generella egenskaper gällande Karhunen-Loève-koefficienterna som vi senare utnyttjar för att skriva om termerna i Karhunen-Loève-expansionen (6) till uttryck som kan simuleras.

Lemma 6.2. Låt T vara ett isotropiskt stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$ med Karhunen-Loève-koefficienter $\mathbb{A} := (a_{\ell m}, \ell \in \mathbb{N}_0, m = -\ell, \dots, \ell)$. Elementen i följderna $\mathbb{A}$ är, förutom för a_{00} , centrerade stokastiska variabler, det vill säga $\mathbb{E}(a_{\ell m}) = 0$ för alla $\ell \in \mathbb{N}$ och $m = -\ell, \dots, \ell$. Vidare existerar det en följd $(A_\ell, \ell \in \mathbb{N}_0)$ av icke-negativa reella tal sådana att:

$$\mathbb{E}(a_{\ell_1 m_1} \overline{a_{\ell_2 m_2}}) = A_\ell \delta_{\ell_1 \ell_2} \delta_{m_1 m_2}, \quad (8)$$

för $\ell_1 \ell_2 \in \mathbb{N}$ och $m_i = -\ell_i, \dots, \ell_i, i = 1, 2$, där $\delta_{nm} = 1$ om $n = m$ och är lika med noll annars.

För Karhunen-Loève-koefficienten a_{00} gäller det att:

$$\mathbb{E}(a_{00} \overline{a_{\ell m}}) = (A_0 + \mathbb{E}(a_{00})^2) \delta_{0\ell} \delta_{0m}. \quad (9)$$

Följden $(A_\ell, \ell \in \mathbb{N}_0)$ kallas för T s effektspektrum (eng. angular power spectrum). För $\ell \in \mathbb{N}$ och $m = -\ell, \dots, \ell$ gäller det dessutom att de stokastiska variablerna $a_{\ell m}$ och $a_{\ell-m}$ uppfyller:

$$a_{\ell m} = (-1)^m \overline{a_{\ell-m}}. \quad (10)$$

Effektspektrat $(A_\ell, \ell \in \mathbb{N}_0)$ förser oss med ett sätt att uttrycka Karhunen-Loève-koefficienterna $a_{\ell m}$. För varje enskild frekvens i serieexpansionen från sats 6.1 får vi med effektspektrat ett värde på styrkan i fältet T , alltså precis vad varje koefficient i en Karhunen-Loève-expansion beskriver. I avsnitt 7 ser vi hur denna egenskap används för att ta fram ett approximativt uttryck för ett iGRF T .

Med definitionen av effektspektrat från lemma 6.2 kan vi fastställa fördelningarna hos Karhunen-Loève-koefficienterna $\mathbb{A}$ till ett iGRF T på $\mathbb{S}^2$. Lägg märke till att vi nu använder klotytefunktionerna från avsnitt 5 som bas i expansionen. Notera även skillnaden mellan ett isotropiskt stokastiskt fält och ett isotropiskt gaussiskt stokastiskt fält (iGRF). Vi har i det senare valt att ge fältet en gaussisk fördelning och måste också ta fram ett uttryck för hur ett sådant fälts Karhunen-Loève-expansion ser ut. Vi refererar återigen till [4], där korollarium 2.5 beskriver just ett sådant uttryck.

Korollarium 6.1. *Låt T vara ett isotropiskt gaussiskt stokastiskt fält på $\mathbb{S}^2$. Då antar T Karhunen-Loève-expansionen*

$$T = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m},$$

där $(Y_{\ell m}, \ell \in \mathbb{N}_0, m = -\ell, \dots, \ell)$ är följderna av klotytefunktioner och

$\mathbb{A} = (a_{\ell m}, \ell \in \mathbb{N}_0, m = -\ell, \dots, \ell)$ är en sekvens av komplexvärda, gaussiskt fördelade stokastiska variabler med egenskaperna :

1. $\mathbb{A}_+ := (a_{\ell m}, \ell \in \mathbb{N}_0, m = 0, \dots, \ell)$ är en sekvens av oberoende, komplexvärda, gaussiskt stokastiska variabler.
2. För elementen i $\mathbb{A}_+$ med $m > 0$ gäller det att $\operatorname{Re}(a_{\ell m})$ och $\operatorname{Im}(a_{\ell m})$ är oberoende och $\mathcal{N}(0, A_\ell/2)$ -fördelade.
3. Elementen i $\mathbb{A}_+$ med $m = 0$ är reellvärda och $\operatorname{Re}(a_{\ell 0}) \sim \mathcal{N}(0, A_\ell)$ för $\ell \in \mathbb{N}$, medan $\operatorname{Re}(a_{00}) \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(T)2\sqrt{\pi}, A_0)$.
4. Elementen i $\mathbb{A}$ med $m < 0$ får man från elementen i $\mathbb{A}_+$ av

$$\operatorname{Re}(a_{\ell m}) = (-1)^m \operatorname{Re}(a_{\ell -m}), \quad \operatorname{Im}(a_{\ell m}) = (-1)^{m+1} \operatorname{Im}(a_{\ell -m}).$$

Korollarium 6.1 ger oss ett sätt att expandera ett iGRF T på $\mathbb{S}^2$. Klotytefunktionerna används som bas då de är parvis ortogonala på $\mathbb{S}^2$. Dessutom ger korollarium 6.1 att Karhunen-Loève-koefficienterna $\mathbb{A}$ från ovan kan uttryckas med hjälp av T 's effektspektrum, då de är normalfördelade med en varians som är beroende av effektspektrat.

7 Approximering av iGRF på $\mathbb{S}^2$

Uttrycket för iGRF:et T på $\mathbb{S}^2$ från korollarium 6.1 kan approximeras till ett fält vi kan simulera. För att simulera T måste vi skriva om fältet i reella termer. Vi använder oss av lemma 5.1 från [4], där vi finner det approximerade fältet som ges av ekvation (11) nedan.

Lemma 7.1 (Karhunen-Loève-expansionen i reella termer). *Låt T vara ett centrerat iGRF. För $\ell \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, \ell$ och $\vartheta \in [0, \pi]$, definieras:*

$$L_{\ell m}(\vartheta) := \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_{\ell m}(\cos(\vartheta)).$$

För $y = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ gäller det därför:

$$T(y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sqrt{A_\ell} X_{\ell 0}^1 L_{\ell 0}(\vartheta) + \sqrt{2A_\ell} \sum_{m=1}^{\ell} L_{\ell m}(\vartheta) (X_{\ell m}^1 \cos(m\varphi) + X_{\ell m}^2 \sin(m\varphi)) \right) \quad (11)$$

i lag, där $((X_{\ell m}^1, X_{\ell m}^2), \ell \in \mathbb{N}_0, m = 0, \dots, \ell)$ är en följd av oberoende, reella, stokastiska variabler så att $X_{\ell m}^i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ för $i = 1, 2$ och alla $\ell \in \mathbb{N}_0, m = 0, \dots, \ell$, och $X_{\ell 0}^2 = 0$ för $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Det är inte uppenbart att Karhunen-Loève-expansionen från korollarium 6.1 kan skrivas om till ekvation (11); för bevis av denna hänvisas läsaren därför till [4, s. 3069]. Beviset ger även en förklaring till hur uttrycket i ekvation (11) härleds.

Vi noterar att den approximerade serien även den baseras på klotytefunktionerna, men en normaliserad version av dessa. Det gäller för $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ och $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m = -\ell, \dots, \ell$ att

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = L_{\ell m}(\vartheta)e^{im\varphi} = L_{\ell m}(\vartheta)(\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi)).$$

Vi ser att $L_{\ell m}$ alltså skrivs i termer av klotytefunktionerna $Y_{\ell m}$, men $L_{\ell m}$ är fullt reell. Vi ser även att den approximerade serien i ekvation (11) baseras på effektspektrat och att Karhunen-Loève-koefficienterna nu skrivits om i termer av normalfördelade stokastiska variabler. Dock är den viktigaste egenskapen hos uttrycket i (11) att alla dess termer är reella. Det är alltså ett uttryck vi kan använda för att implementera en simulering av ett iGRF på sfären $\mathbb{S}^2$.

8 Trunkering av fältet

I simuleringar kan vi dock inte använda oss av en oändlig summa. Vi måste trunkera fältet och välja ett värde för hur många termer som tas med i implementationen. Vi definierar därför ett iGRF T enligt lemma 7.1. För en given följd stokastiska variabler $((X_{\ell m}^1, X_{\ell m}^2), \ell \in \mathbb{N}_0, m = 0, \dots, \ell)$, definierade enligt lemma 7.1, väljer vi

$$T(y) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sqrt{A_{\ell}} X_{\ell 0}^1 L_{\ell 0}(\vartheta) + \sqrt{2A_{\ell}} \sum_{m=1}^{\ell} L_{\ell m}(\vartheta) (X_{\ell m}^1 \cos(m\varphi) + X_{\ell m}^2 \sin(m\varphi)) \right).$$

Vi väljer nu antalet termer hos det trunkerade fältet och benämner talet med κ , där $\kappa \in \mathbb{N}$. Den trunkerade versionen av fältet T följer av

$$T^{\kappa}(y) := \sum_{\ell=0}^{\kappa} \left(\sqrt{A_{\ell}} X_{\ell 0}^1 L_{\ell 0}(\vartheta) + \sqrt{2A_{\ell}} \sum_{m=1}^{\ell} L_{\ell m}(\vartheta) (X_{\ell m}^1 \cos(m\varphi) + X_{\ell m}^2 \sin(m\varphi)) \right), \quad (12)$$

där $y = (\sin(\vartheta) \cos(\varphi), \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \cos(\vartheta))$ för $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Innan vi kan implementera algoritmer för att simulera uttrycket i (12) måste vi veta att det trunkerade fältet T^{κ} konvergerar. Konvergensen hos det trunkerade fältet beror till stor del av en konstant α , där det gäller att $\alpha > 2$. Teorin bakom detta beskrivs i Lang & Schwab [4, s. 3054-3068] och är alldeles för komplex för att behandlas i föreliggande rapport. Det vi behöver veta för att kunna simulera ett iGRF på $\mathbb{S}^2$ är vilket effektspektrum vi ska använda för att få ett approximerat och trunkerat fält som konvergerar. Vi hänvisar återigen till [4, s. 3065] och låter effektspektrat $(A_{\ell}, \ell \in \mathbb{N}_0)$ ges av

$$A_{\ell} := (\ell + 1)^{-\alpha}, \quad (13)$$

där vi kräver av $(A_{\ell}, \ell \in \mathbb{N}_0)$ att denna avtar algebraiskt med en konstant ordning $\alpha > 2$. Utöver detta kan konstanten α väljas godtyckligt och det trunkerade iGRF:et T^{κ} från ekvation (12) kommer konvergera i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$. Detta ges enligt proposition 5.2 från Lang & Schwab [4, s. 3070] eller sats 8.1 nedan.

Sats 8.1 (Konvergens i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ av den trunkerade Karhunen-Loève-expansionen). *Låt effektspektrat $(A_{\ell}, \ell \in \mathbb{N}_0)$ hos det centrerade iGRF:et T avta algebraiskt med ordning $\alpha > 2$; det vill säga, det finns konstanter $C > 0$ och $\ell_0 \in \mathbb{N}$ så att $A_{\ell} \leq C \cdot \ell^{-\alpha}$ för alla $\ell > \ell_0$. Då gäller det att serien av approximativa stokastiska fält $(T^{\kappa}, \kappa \in \mathbb{N})$ konvergerar mot det stokastiska fältet T i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ och trunkeringsfelet begränsas av*

$$\|T - T^{\kappa}\|_{L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))} \leq \hat{C} \kappa^{-(\alpha-2)/2}$$

för $\kappa \geq \ell_0$, där

$$\hat{C}^2 = C \cdot \left(\frac{2}{\alpha - 2} + \frac{1}{\alpha - 1} \right).$$

Beviset till sats 8.1 ges enligt [4, s. 3070].

Härnäst vill vi presentera ett uttryck för konvergens för trunkeringsfelet hos ett approximativt iGRF i $L^2(\mathbb{S}^2)$. Vi använder senare i avsnitt 11 detta för att numeriskt visa på konvergens av samma fält. Det korollarium som används kommer från [4] och kallas där korollarium 5.4.

Korollarium 8.1. *Låt effektspektrat $(A_\ell, \ell \in \mathbb{N})$ hos det centrerade iGRF:et T avta algebraiskt med ordning $\alpha > 2$; det vill säga, det finns konstanter $C > 0$ och $\ell_0 \in \mathbb{N}$ sådana att $A_\ell \leq C \cdot \ell^{-\alpha}$ för alla $\ell > \ell_0$. Då konvergerar följden av approximativa stokastiska fält $(T^\kappa, \kappa \in \mathbb{N})$ mot det stokastiska fältet T $\mathbb{P}$ -nästan säkert och för alla $\beta < (\alpha - 2)/2$ är trunkeringsfelet asymptotiskt begränsat av*

$$\|T - T^\kappa\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq \kappa^{-\beta}, \quad \mathbb{P}\text{-nästan säkert.}$$

Beviset av korollarium 8.1 ges enligt [4, s. 3073] och vi har nu presenterat den teori som krävs för att börja simulera.

9 De tre algoritmerna

För att simulera uttrycket i ekvation (12) har det skrivits tre olika algoritmer. För programkod till dessa hänvisar vi till Cronhamn & Westlund [1]. Innan vi beskriver algoritmerna och deras skillnader noterar vi att uttrycket i (12) är fullt reellt och möjligt att simulera.

9.1 Algoritm 1 & sfäriska koordinater

För algoritmerna används sfäriska koordinater (ϑ, φ) för enhetssfären $\mathbb{S}^2$ och fältet diskretiseras enligt

$$T^\kappa(\mathbb{S}^2) = T^\kappa([0, \pi] \times [0, 2\pi)),$$

där $(\vartheta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi)$. Det fås ett nätverk av punkter på sfären, skrivna i termer av ϑ och φ . Punkternas koordinater sparas i matriser. För varje punkt beräknas värdet av det trunkerade iGRF:et T^κ . Legendrepolytomen genereras med de färdigimplementerade funktioner som finns för dem i MATLAB [8]. För effektspektrat $(A_\ell, \ell = 0, \dots, \kappa)$ används uttrycket i ekvation (13) och T^κ simuleras för $\alpha = 3$ och $\alpha = 5$. Vad avser koden till Algoritm 1 hänvisar vi läsaren till Cronhamn & Westlund [1].

9.2 Vektorisering

I MATLAB är matris-eller vektoroperationer optimerade [9]. Det innebär att ifall vi istället baserar programkoden på for-loopar får vi högre exekveringstider. Vi vill därför använda oss av vektorisering till så hög grad som möjligt. Vektorisering innebär exempelvis att programkod som innehåller en for-loop skrivs om så att vi istället för for-loopen använder matris-eller vektoroperationer.

Exempel 9.1. Nedan finns ett exempel på en bit kod som saknar vektorisering.

```
i = 0;
for i = 0:5
    i = i + k;
end
```

Vi kan med vektorisering skriva om detta som

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Vi påminner läsaren om att ekvationen (12) innehåller en dubbelsummation, vilket antyder att det finns stor potential att optimera uttrycket med hjälp av vektorisering. Exakt hur vi gör detta beskrivs närmre nedan.

9.3 Algoritm 2

Algoritm 2 kan ses som en vidareutveckling av Algoritm 1. I ekvationen (12) uttrycks det trunkerade iGRF:et T^κ med en dubbelsummation. I syfte att öka tidseffektiviteten i algoritmen används därför MATLAB:s interna funktioner för att generera matriser för varje term i den inre summan i ekvation (12). Dessa matriser kan nu användas för att skriva om T^κ som en enkel summa. Den inre summan (se den röda rutan) skrivs om med hjälp av vektorisering.

$$T^\kappa(y) := \sum_{\ell=0}^{\kappa} \left(\sqrt{A_\ell} X_{\ell 0}^1 L_{\ell 0}(\vartheta) + \sqrt{2A_\ell} \sum_{m=1}^{\ell} L_{\ell m}(\vartheta) (X_{\ell m}^1 \cos(m\varphi) + X_{\ell m}^2 \sin(m\varphi)) \right)$$

Att använda matrisoperationer är snabbare än att för varje enskilt index utföra en summation genom exempelvis en `for`-loop. Algoritm 2 blir därför snabbare än Algoritm 1 (se avsnitt 10 för närmre analys av exekveringstider hos algoritmerna). Vad beträffar koden till algoritm 2 hänvisar vi läsaren till [1].

9.4 Algoritm 3

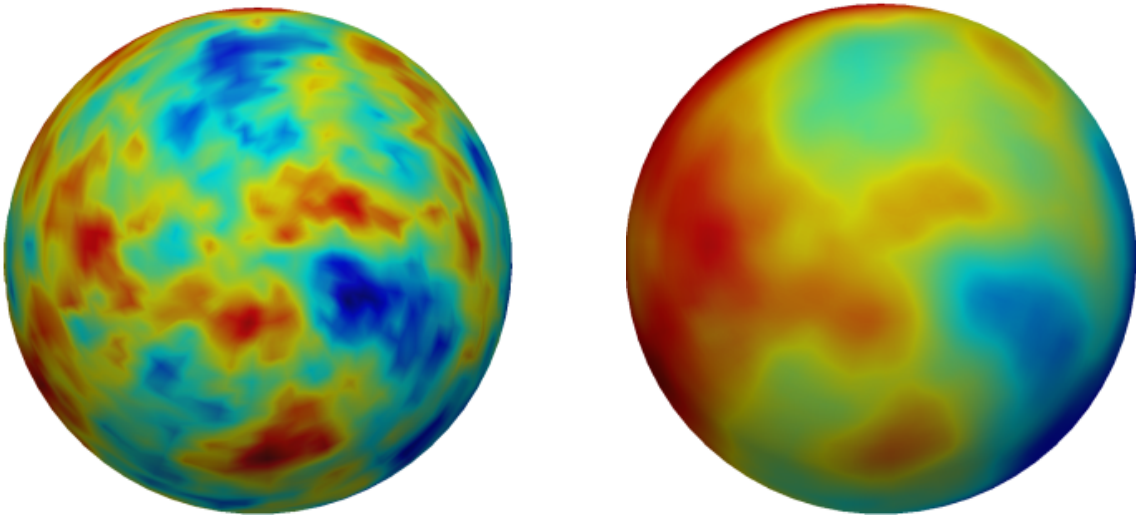
Algoritm 3 utvecklas från algoritm 2 via ytterligare vektoriseringar av uttrycket för T^κ från ekvation (12). Med hjälp av MATLAB:s interna matrisoperationer kan även den yttre summan (se återigen den röda rutan) i ekvation (12) förenklas bort.

$$T^\kappa(y) := \sum_{\ell=0}^{\kappa} \left(\sqrt{A_\ell} X_{\ell 0}^1 L_{\ell 0}(\vartheta) + \sqrt{2A_\ell} \sum_{m=1}^{\ell} L_{\ell m}(\vartheta) (X_{\ell m}^1 \cos(m\varphi) + X_{\ell m}^2 \sin(m\varphi)) \right)$$

Algoritm 3 summerar inte över varje enskilt index $\ell = 0, \dots, \kappa$. Därför är Algoritm 3 även snabbare än Algoritm 2. Koden till Algoritm 3 återfinns i [1]. I avsnitt 10 nedan visar vi numeriskt på tidskomplexiteten hos alla tre algoritmer.

9.5 Det simulerade iGRF:et på $\mathbb{S}^2$

Nedan i figur 5 syns det iGRF som simulerats med hjälp av uttrycket i ekvation (12). Notera α -värdets inverkan på fältets utseende. Vi ser att vi för ett högre $\alpha = 5$ får vi ett mer utjämnat fält än för ett lägre $\alpha = 3$.



Figur 5: För var och en av de tre algoritmerna kan vi simulera iGRF på enhetssfären. För att generera bilden ovan användes Algoritm 3. Vänster bild $\alpha = 3$. Höger bild $\alpha = 5$. Figuren hänvisas till [1].

Vi har nu simulerat ett approximativt iGRF på enhetssfären $\mathbb{S}^2$ och presenterat tre olika algoritmer för att göra så. Vi är nu redo att fortsätta vidare och diskutera effektiviteten, mer bestämt tidskomplexiteten, hos algoritmerna.

10 Komplexitet och exekveringstider hos algoritmerna

10.1 Ordo-notation ($\mathcal{O}$)

Innan vi diskuterar komplexitet och exekveringstider hos de tre algoritmerna presenterar begreppet *ordo* som är välkänt inom matematik och datavetenskap. Inom datavetenskapen använder man notationen för att beskriva tidseffektivitet hos en algoritm på ett smidigt sätt. Vi letar efter en asymptotisk övre gräns, d.v.s. ordo, för hur tidsåtgången hos en algoritm ökar med någon given parameter. Vi betecknar ordo med $\mathcal{O}$ och låter Adams & Essex [6, s. 277] ge ett exempel på hur vi använder begreppet.

Exempel 10.1 (Ordo). Vi skriver att $f(x) = \mathcal{O}(u(x))$ när $x \rightarrow a$ ifall

$$|f(x)| \leq C|u(x)|$$

gäller för någon konstant C på något öppet intervall som innehåller $x = a$.

Exempel 10.2. Låt $f(x) = 3x^4 - x + 6$. Vi visar att $|f(x)| \leq Cx^4 = \mathcal{O}(x^4)$ för alla $x > 1$. Det gäller att

$$|f(x)| = |3x^4 - x + 6| \leq 3x^4 + |x| + 6 \leq 3x^4 + x^4 + 6x^4 = 10x^4,$$

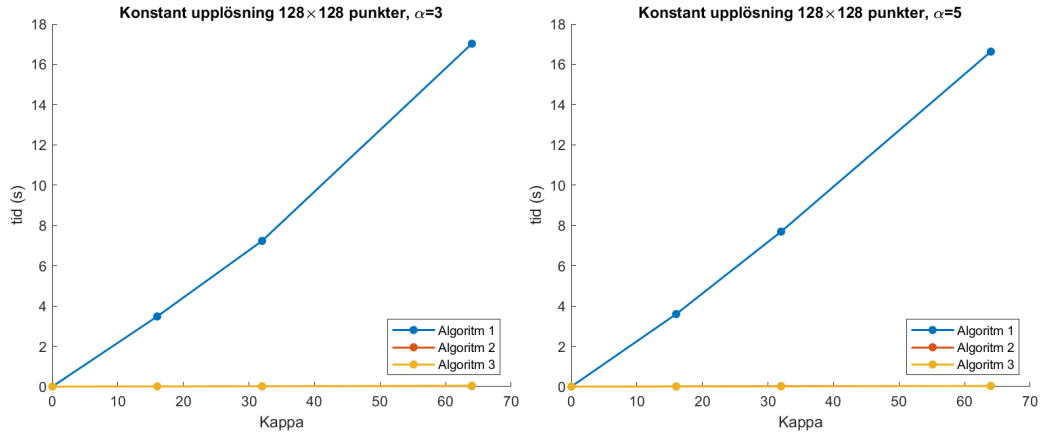
där vi ser att det finns ett tal C sådant att $f(x) = \mathcal{O}(u(x)) = \mathcal{O}(x^4)$ precis som i exempel 10.1.

10.2 Komplexitet och exekveringstider

Vi kör algoritmerna och analyserar deras exekveringstider. Vi gör två typer av körningar, en där vi enbart varierar κ (alltså antalet termer i serieexpansionen) och en där vi enbart varierar antalet punkter i sfärens upplösning. Notera att vi för varje värde i tabeller och figurer i detta avsnitt beräknat medelvärde av exekveringstiden över 20 simuleringar genom att använda en färdigimplementerad funktion som heter *tic* [10]. Funktionen *tic* fungerar som ett tidtagarur i MATLAB och används för att mäta exekveringstider för koder eller algoritmer. Det finns dessvärre osäkerheter i funktionen då variansen är nödvändig; vi hänvisar här till Appendix.

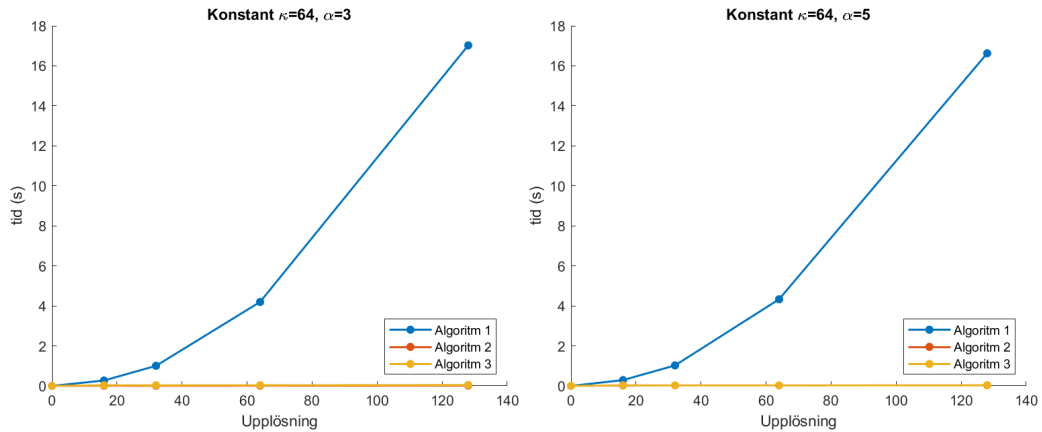
Vi börjar med att analysera de tre algoritmernas prestanda under en konstant upplösning på 128 punkter. Figur 6 nedan visar hur de tre algoritmernas exekveringstider varierar med κ i x -axeln.

Som vi ser är Algoritm 2 och 3 avsevärt mycket snabbare än Algoritm 1. Dessutom noterar vi hur värdet på konstanten α inte tycks ha någon större påverkan på algoritmernas prestanda.



Figur 6: Exekveringstider (i sekunder) för de tre algoritmerna ritat mot värdet hos konstanten κ . I båda grafer har vi använt en konstant upplösning på 128×128 punkter. I den vänstra grafen användes $\alpha = 3$ och i den högra användes $\alpha = 5$. Observera att den röda kurvan för Algorit 2 ligger bakom den gula kurvan för Algorit 3.

Härnäst analyserar vi algoritmernas exekveringstider för ett konstant värde på κ . Figur 7 nedan visar hur de tre algoritmernas exekveringstider varierar med upplösningen (antal punkter på sfären) i x -axeln. Algorit 2 och 3 är återigen avsevärt mycket snabbare än Algorit 1. Inte heller denna gång verkar värdet på α ha någon större inverkan på algoritmernas prestanda (se figur 7 nedan).



Figur 7: Exekveringstider (i sekunder) för de tre algoritmerna ritat mot värdet hos på upplösningen. I båda grafer har vi använt ett konstant $\kappa = 64$. I den vänstra grafen användes $\alpha = 3$ och i den högra användes $\alpha = 5$. Observera att röda kurvan är bakom gula kurvan för Algorit 3.

Vi väljer på grund av ovanstående att inte analysera tidskomplexiteten hos Algorit 1 närmre. Denna är så pass ineffektiv beräkningsmässigt att den för höga κ och/eller för hög upplösning inte presterar i närheten av Algorit 2 eller Algorit 3. Dock har vi under körningar märkt att den är bättre ur minnessynpunkt, vilket kan vara en fördel. I komplexitetsanalysen nedan diskuterar vi dock endast prestandan gällande exekveringstider och därför jämför vi endast Algorit 2 med Algorit 3.

10.3 Konstant upplösning

Vi kör Algoritm 2 och 3 för en konstant upplösning av sfären med 2048×2048 punkter, där enbart κ varierar. Vi testar $\kappa = 16, 32, 64, 128$ och noterar att exekveringstiderna i tabell 3 (Algoritm 3) är snabbare än dem i tabell 2 (Algoritm 2).

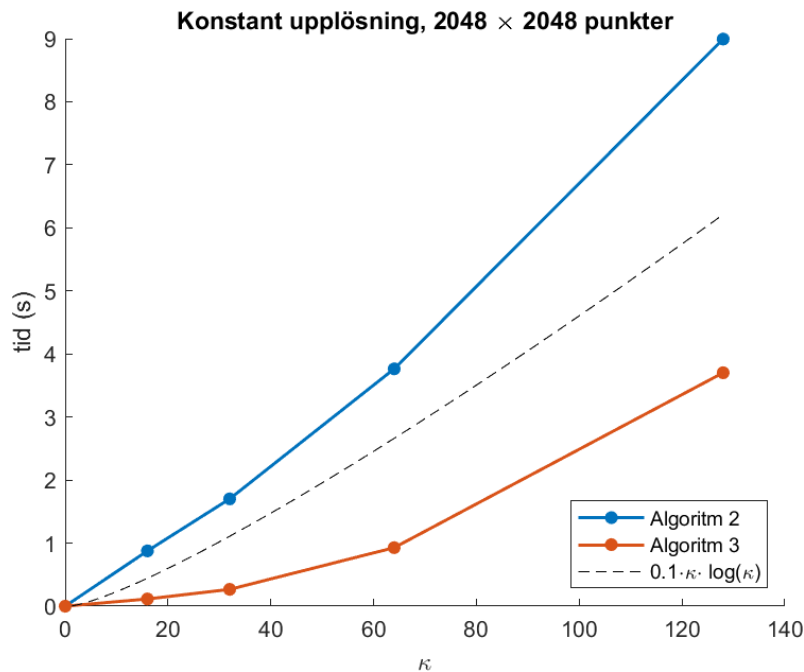
κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
16	2048×2048	0.8767	0.0007208
32	2048×2048	1.7018	0.0026
64	2048×2048	3.7638	0.0717
128	2048×2048	8.9943	1.3105

Tabell 2: Prestanda för Algoritm 2 med konstant upplösning på 2048×2048 punkter. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 stycken körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
16	2048×2048	0.1140	0.0000639
32	2048×2048	0.2600	0.0001450
64	2048×2048	0.9279	0.0005
128	2048×2048	3.7023	0.0028

Tabell 3: Prestanda för Algoritm 3, konstant upplösning på 2048×2048 punkter. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 stycken körningar.

Vi ritar en graf med våra mätvärden (se figur 8) och ser att även om Algoritm 3 är snabbare än Algoritm 2, verkar exekveringstiderna inte vara alltför långt ifrån varandra. Vi har dessutom lagt in en referenslinje av komplexitet $\mathcal{O}(\kappa \log \kappa)$, alltså linearitmisk tid, så att läsaren kan få en uppfattning om vilken ordning exekveringstiderna växer med. Notera att vi i grafen skalat vår referenslinje med en faktor 0.1. Detta är eftersom axlarna i figur 8 inte normerats.



Figur 8: Figur över hur exekveringstiden (i sekunder) varierar med κ

10.4 Konstant κ

Vi testar nu Algoritm 2 och 3 för ett konstant $\kappa = 128$ och varierande upplösning på 256×256 , 512×512 , 1024×1024 och 2048×2048 punkter. Notera att exekveringstiderna även denna gång är snabbare för Algoritm 3 (tabell 5) än för Algoritm 2 (tabell 4).

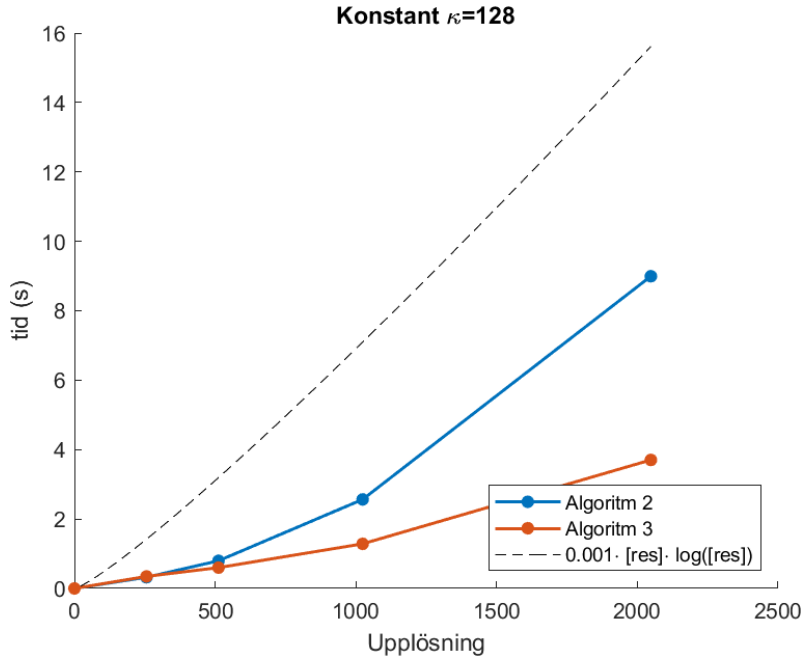
κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
128	256×256	0.3216	0.0035
128	512×512	0.7972	0.0044
128	1024×1024	2.5650	0.0259
128	2048×2048	8.9943	1.3105

Tabell 4: Prestanda för Algoritm 2, konstant κ på 128. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 stycken körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
128	256×256	0.3464	0.0123
128	512×512	0.6002	0.0018
128	1024×1024	1.2854	0.0020
128	2048×2048	3.7023	0.0028

Tabell 5: Prestanda för Algoritm 3, konstant κ på 128. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 stycken körningar.

Figur 9 visar återigen att det är tydligt att Algoritm 3 är snabbare än Algoritm 2. Vi har i figur 9 nedan lagt in en referenslinje av den linearitmiska komplexiteten $\mathcal{O}([\text{res}] \cdot \log([\text{res}]))$, där vi låter $[\text{res}]$ beteckna sfärens upplösning. Vi har precis som i figur 8 skalat referenslinjen, denna gång med en faktor 0.001. Detta är återigen eftersom vi inte normerat axlarna i figur 9.



Figur 9: Figur över hur exekveringstiden varierar med upplösningen (antal punkter på sfären)

Vi ser i figurerna 7 och 6 att valet av α inte verkar påverka den tidsmässiga prestandan nämnvärt.

11 Konvergens i L^2 och simuleringar av trunkeringsfelet

För att bekräfta att vårt approximerade iGRF följer de analytiska konvergensresultat som ges av sats 8.1 approximerar vi trunkeringsfelet numeriskt. Från sats 8.1 får vi en begränsning av felet hos vårt trunkerade och approximerade iGRF i $L^2(\Omega; \mathbb{S}^2)$ genom

$$\|T - T^\kappa\|_{L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))} \leq \hat{C} \kappa^{-(\alpha-2)/2}, \quad (14)$$

för $\kappa \geq \ell_0$ och där $\hat{C}$ är en konstant given enligt sats 8.1. Vi får även enligt korollarium 8.1 att

$$\|T - T^\kappa\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq \kappa^{-\beta}, \quad \mathbb{P}\text{-nästan säkert}, \quad (15)$$

där vi använder $\beta < (\alpha-2)/2$. Vi har alltså för enskilda realisationer på $L^2(\mathbb{S}^2)$ en given begränsning av trunkeringsfelet. I följande avsnitt undersöker vi numeriskt konvergensens av dessa feltermer.

Vi bör dock inledningsvis nämna att vi inte har en exakt lösning för fältet T . Vi använder istället en referenslösning T^M för något stort M som är större än alla κ . I våra simuleringar har vi använt ett referensfält T^M med $M = 2^9$. Vi låter κ ges av $\kappa = \{2, 2^2, \dots, 2^8\}$ och jämför därefter det trunkerade fältet T^κ med referensfältet T^M . Som effektspektra använder vi $(A_\ell = (1+\ell)^{-\alpha}, \ell = 0, \dots, \kappa)$, som uppfyller antaganden från sats 8.1 och korollarium 8.1. Vi väljer även godtyckliga konstanter $\alpha > 2$ i effektspektrat.

11.1 Fel i $L^2(\mathbb{S}^2)$

Vi simulerar nu enskilda realisationer av det trunkerade iGRF:et T^κ , vilka vi skriver som $T^\kappa(\omega)$ för något $\omega \in \Omega$. Trunkeringsfelet relativt referenslösningen låter vi därför enligt ekvation (15) ges av

$$\|T^M(\omega) - T^\kappa(\omega)\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} \leq \kappa^{-\beta}, \quad (16)$$

för $\beta < (\alpha - 2)/2$. Notera att vi inte visat analytiskt att felet givet av ekvation (15) är begränsat, då vi, som tidigare nämnts, använt referenslösningen T^M istället för iGRF:et T och dessa inte är lika. Dock kan vi i figur 10 i avsnitt 11.2 nedan se att felet fortfarande numeriskt begränsas av $\kappa^{-\beta}$ för tillräckligt stora M .

Det första tillvägagångssättet som vi använt för att approximera trunkeringsfelet bygger på mittpunktsmetoden. Vi gör nu inga rigorösa definitioner, men kort sammanfattat fås trunkeringsfelet genom [1]

$$\int_{\mathbb{S}^2} |T(\omega) - T^\kappa(\omega)|^2 d\sigma. \quad (17)$$

Dock är det svårt att applicera räkneregler för integraler på ekvation (17). Vi behöver en diskretiserad typ av ekvationen d.v.s. en diskretisering av ytan på sfären. Därefter använder vi en Riemannsumma för att ge en närmre numerisk approximation till trunkeringsfelet. För diskretiseringen av ytan på $\mathbb{S}^2$ skapar vi rätblock av storlek $\Delta\vartheta_i \times \Delta\varphi_j$. Funktionsvärdet för alla punkter (ϑ_i, φ_j) i rutnätet motsvarar

$$|T^M(\omega, \vartheta_i, \varphi_j) - T^\kappa(\omega, \vartheta_i, \varphi_j)|^2.$$

Därefter tar vi Riemannsumman av varje funktionsvärde. Det ska dock tilläggas att vårt område inte är rektangulärt utan en yta sfärisk yta och rutnätet deformeras när vi "lindar" det runt sfären. Därför använder vi Lebesguemåttet från tidigare (se avsnitt 2) så att alla punkter transformeras. Vi ger ett exempel (kapitel 5) ur Adams & Essex [6, s. 303-305] för att förklara närmre vad det innebär att använda en Riemannsumma.

Exempel 11.1. För begreppet Riemannsumma hänvisar vi till Adams & Essex [6]. Vi låter $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, där $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, är en partition med normen $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ för $0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}_0$. För varje delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ av P väljer vi en punkt c_i och låter $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ beteckna mängden av punkterna. Summan

$$R(f, p, c) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n,$$

kallas för Riemannsumman till f på $[a, b]$. Exempelvis är gränsvärdet (Riemannsumman)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(1 + \frac{2i-1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$$

lika med

$$\int_0^2 (1+x)^{\frac{1}{3}} dx.$$

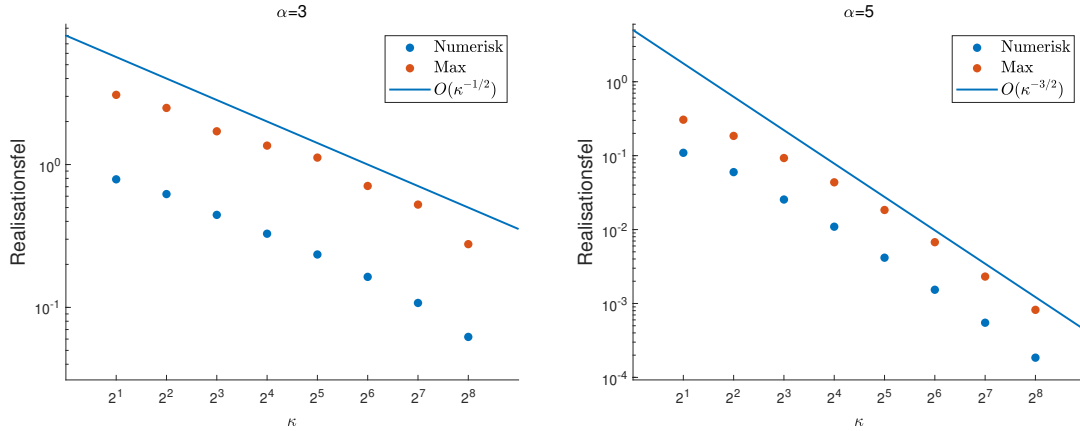
Vi har använt ytterligare en metod för att approximera trunkeringsfelet. Det andra tillvägagångssättet bygger på att vi tar maximum av alla funktionsvärden i alla punkter på $\mathbb{S}^2$. Därefter multiplicerar vi maximumvärdet med faktorn 4π eftersom arean av enhetsfären motsvarar

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\sigma = 4\pi.$$

Med andra ord, vi använder återigen rätblock av storlek $\Delta\vartheta_i \times \Delta\varphi_j$ (likt det första tillvägagångssättet) för att därefter söka genom hela rutnätet för att hitta maximumvärdet. Vi multiplicerar arean av rutnätet, eller rättare sagt sfären, vilken som sagt är 4π .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^2} |T(\omega) - T^\kappa(\omega)|^2 d\sigma &\leq 4\pi \max_{y \in \mathbb{S}^2} |T(\omega, y) - T^\kappa(\omega, y)|^2 \\ &\approx 4\pi \max_{\varphi_i, \vartheta_j : 1 \leq i, j \leq n} |T^M(\omega, y) - T^\kappa(\omega, y)|^2. \end{aligned}$$

Nedan, i figur 10, syns det resulterande trunkeringsfelet från de olika metoderna. I figuren finns även en referenslinje till $\mathcal{O}(\kappa^{-(\alpha-2)/2})$ ritad. Båda grafer i figur 10 är ritade med hjälp av Algoritm 3 men



Figur 10: En enskild realisation av trunkeringsfelet för $\kappa = 2^n$, $n = 1, \dots, 8$. Bilden är ritad med upplösning 256×256 och effektspektrat ges av $(A_\ell = (1 + \ell)^{-\alpha}, \ell = 0, \dots, \kappa)$. I den vänstra grafen har $\alpha = 3$ använts och i den högra använde vi $\alpha = 5$. Notera att figuren genererats av programkod från [1].

med en mindre modifikation. Vi låter det trunkerade iGRF:et T^κ , $\kappa < 2^9$ tas som undermatriser till de matriser som redan genererats för T^M .

11.2 Fel i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$

För att approximera trunkeringsfelet i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ använder vi oss nu av sats 8.1. Vi använder uttrycket i ekvation (14) för att visa att $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ -normen av trunkeringsfelet begränsas enligt

$$\|T^M - T^\kappa\|_{L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))} \leq \hat{C} \kappa^{-(\alpha-2)/2}, \quad (18)$$

för $\kappa \geq \ell_0$, $M = 2^9$ och där $\hat{C}$ är en konstant given såsom i sats 8.1. Notera hur vi återigen inte visat analytiskt att uttrycket ovan gäller, men att vi numeriskt kommer att visa på konvergens av trunkeringsfelet (se figur 11). Vi använder Monte Carlo-metoden för att beräkna normen i ekvation (18). Vi låter ett exempel (Exempel A, avsnitt 5.2) ur Rice [11, s. 179] illustrera hur metoden fungerar.

Exempel 11.2 (Monte Carlo-metoden). Vi genererar oberoende och likformigt fördelade stokastiska variabler på intervallet $[0, 1]$, alltså $X_1, X_2, \dots, X_n$ för $1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$. Därefter beräknar vi

$$\hat{I}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

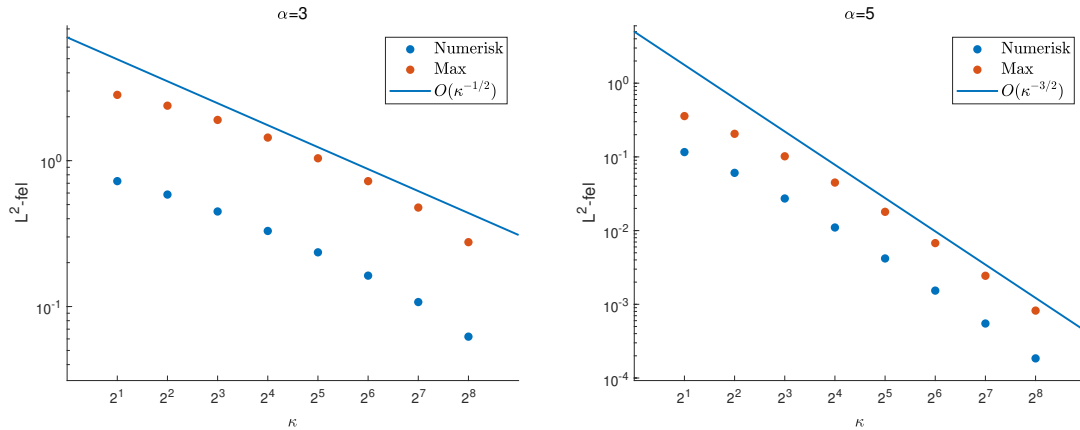
De stora talens lag säger att detta är en god approximation till $\mathbb{E}(f(X))$, där väntevärdet beräknas som

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_0^1 f(x) dx = I(f) \approx \hat{I}(f).$$

Vi kan skriva $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$ -normen av trunkeringsfelet som ett väntevärde av trunkeringsfelets kvadrat i $L^2(\mathbb{S}^2)$ -normen. Detta påstående motiveras något av exempel 4.3, men för en fullständig förklaring, se Cronhamn & Westlund [1]. Vi använder nu Monte Carlo-metoden och beräknar

$$\mathbb{E}(\|T - T^\kappa\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|T_i - T_i^\kappa\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}^2$$

vilket alltså är en approximation av trunkeringsfelet $\|T - T^\kappa\|_{L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))}$ i det totala utfallsrummet. Nedan i figur 11, ser vi hur trunkeringsfelet avtar med en ordning $\mathcal{O}(\kappa^{-(\alpha-2)/2})$. Konvergenstigheten av feltermen begränsas alltså av den ordning som ges av sats 8.1, trots att vi använt referenslösningen T^M med $M = 2^9$ termer.



Figur 11: Monte Carlo-estimeringar av $\|T - T^\kappa\|_{L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))}$ med referenslösning T^M för $M = 2^9$, och $n = 1000$ Monte Carlo-realisationer. Den inre integralen är beräknad med maxmetoden och med mittpunktsmetoden. Effektspektrat ges av $(A_\ell = (1 + \ell)^{-\alpha}, \ell = 0, \dots, \kappa)$, där $\alpha = 3$ i vänster figur och $\alpha = 5$ i höger figur. Upplösning för ϑ, φ är 256×256 . Notera att figuren genererats av programkod från [1].

12 Sammanfattning & avslutande ord

För att avsluta rapporten vill vi ta upp några av de huvudsakliga resultat vi behandlat i arbetet. Som beskrivs i avsnitt 7 är det möjligt att härleda ett approximativt och reellt uttryck för ett

iGRF på sfären $\mathbb{S}^2$. Summan från uttrycket i ekvation (11) ur avsnitt 7 kan dessutom trunkeras till en finit summa av κ termer som konvergerar mot det exakta iGRF:et i $L^2(\Omega; L^2(\mathbb{S}^2))$. Dessutom är trunkeringsfelet asymptotiskt begränsat i $L^2(\mathbb{S}^2)$.

Det har skrivits tre olika algoritmer för att simulera det approximativa fältet, där algoritmerna skiljer sig sinsemellan i grad av vektorisering. Genom komplexitetsanalys fann vi att Algoritm 3 var snabbast. Dessutom gjordes en numerisk analys av trunkeringsfelet med hjälp av mittpunktsmetoden, maxmetoden och Monte Carlo-simuleringar, där vi bekräftar att feltermen avtar så som ges av sats 8.1 och korollarium 8.1.

Referenser

- [1] C. Cronhamn och K. Westlund, “Simulering av stokastiska fält på sfären”, *Opublicerad*, Maj 2022.
- [2] D. Marinucci och G. Peccati, *Random Fields on the Sphere: Representation, Limit Theorems and Cosmological Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [3] NASA. “Cosmic Microwave Background [Online]”. (2013), URL: https://apod.nasa.gov/apod/image/1303/cmb_planck_3600.jpg (hämtad 2022-05-12).
- [4] A. Lang och C. Schwab, “Isotropic Gaussian random fields on the sphere: Regularity, fast simulation and stochastic partial differential equations”, *Ann. Appl. Probab.*, årg. 25, s. 3047–3094, 6 dec. 2015.
- [5] G. Nelson, *A User-friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration*. United States of America: American Mathematical Society, 2015.
- [6] R. A. Adams och C. Essex, “*Calculus a Complete Course*”. Canada: Pearson Education, 2013.
- [7] G. Lord, C. Powell och T. Shardlow, *An Introduction to Computational Stochastic PDEs*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [8] “Associated Legendre functions (legendre) [Online]”, The Mathworks, Inc. (2022), URL: <https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/legendre.html> (hämtad 2022-05-12).
- [9] “Vectorization [Online]”, The Mathworks, Inc. (2022), URL: https://se.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/vectorization.html (hämtad 2022-05-12).
- [10] “Tic - Start stopwatch timer [Online]”, The Mathworks, Inc. (2022), URL: <https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/tic.html> (hämtad 2022-05-12).
- [11] J. A. Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis*, 3rd. Belmont: Duxbury Press, 2007.

A Appendix

Avsnitt A.1 nedan innehåller tabeller kopplade till specifika parameteruppsättningar, med den empiriska mätdata gällande exekveringstider som genererat figurerna 6, 7, 9 och 8 i avsnitt 10. Därefter följer avsnitt A.2, där programkoden som genererat tidigare nämnda figurer visas.

A.1 Tillhörande mätdata för figur 6, 7, 8 och 9

A.1.1 Algoritm 1 för $\alpha = 3$, konstanta kappan

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
16	16	0.0963	0.0041
16	32	0.2191	0.0001
16	64	0.9457	0.0073
16	128	3.4813	0.0076

Tabell 6: Prestanda för Algoritm 1 med konstant $\kappa = 16$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
32	16	0.1429	0.0021
32	32	0.4758	0.0003
32	64	1.8045	0.0015
32	128	7.2319	0.0027

Tabell 7: Prestanda för Algoritm 1 med konstant $\kappa = 32$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
64	16	0.2700	0.0041
64	32	1.0047	0.0001
64	64	4.1965	0.1600
64	128	17.0227	1.0511

Tabell 8: Prestanda för Algoritm 1 med konstant $\kappa = 64$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

A.1.2 Algoritm 1 för $\alpha = 5$, konstanta kappan

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
16	16	0.0762	0.0007
16	32	0.2165	0.0000
16	64	1.1679	0.0711
16	128	3.6002	0.0685

Tabell 9: Prestanda för Algoritm 1 med konstant $\kappa = 16$ och $\alpha = 5$. Exekverings och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
32	16	0.1416	0.0030
32	32	0.4579	0.0002
32	64	1.8460	0.0014
32	128	7.6909	0.3674

Tabell 10: Prestanda för Algoritm 1 med konstant $\kappa = 32$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (s)
64	16	0.2895	0.0057
64	32	1.0248	0.0004
64	64	4.3319	0.2083
64	128	16.6281	0.0610

Tabell 11: Prestanda för Algoritm 1 med konstant $\kappa = 64$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

A.1.3 Algoritm 2 för $\alpha = 3$, konstanta kappan

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
16	16	0.0042	0.5681
16	32	0.0031	0.0001
16	64	0.0051	0.0159
16	128	0.0078	0.0024

Tabell 12: Prestanda för Algoritm 2 med konstant $\kappa = 16$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
32	16	0.0105	0.2737
32	32	0.0067	0.0019
32	64	0.0100	0.0008
32	128	0.0160	0.0021

Tabell 13: Prestanda för Algoritm 2 med konstant $\kappa = 32$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
64	16	0.0222	0.2800
64	32	0.0223	0.0229
64	64	0.0260	0.0347
64	128	0.0309	0.0073

Tabell 14: Prestanda för Algoritm 2 med konstant $\kappa = 64$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

A.1.4 Algoritm 2 för $\alpha = 5$, konstanta kappan

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
16	16	0.0060	0.2030
16	32	0.0027	0.0003
16	64	0.0039	0.0003
16	128	0.0072	0.003

Tabell 15: Prestanda för Algoritm 2 med konstant $\kappa = 16$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
32	16	0.0160	0.3465
32	32	0.0070	0.0027
32	64	0.0111	0.0095
32	128	0.0192	0.0241

Tabell 16: Prestanda för Algoritm 2 med konstant $\kappa = 32$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

A.1.5 Algoritm 3 för $\alpha = 3$, konstanta kappan

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
64	16	0.0211	0.1986
64	32	0.0241	0.0131
64	64	0.0248	0.0459
64	128	0.0300	0.0073

Tabell 17: Prestanda för Algoritm 2 med konstant $\kappa = 64$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
16	16	0.0087	0.3942
16	32	0.0043	0.0005
16	64	0.0047	0.0008
16	128	0.0066	0.0006

Tabell 18: Prestanda för Algoritm 3 med konstant $\kappa = 16$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
32	16	0.0152	0.6753
32	32	0.0077	0.0019
32	64	0.0100	0.0024
32	128	0.0150	0.0020

Tabell 19: Prestanda för Algoritm 3 med konstant $\kappa = 32$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
64	16	0.0335	0.9024
64	32	0.0289	0.0059
64	64	0.0329	0.0371
64	128	0.0438	0.0214

Tabell 20: Prestanda för Algoritm 3 med konstant $\kappa = 64$ och $\alpha = 3$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

A.1.6 Algoritm 3 för $\alpha = 5$, konstanta kappan

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
16	16	0.0094	0.4239
16	32	0.0039	0.0007
16	64	0.0041	0.0002
16	128	0.0008	0.0003

Tabell 21: Prestanda för Algoritm 3 med konstant $\kappa = 16$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
32	16	0.0099	0.4957
32	32	0.0038	0.0003
32	64	0.0040	0.0003
32	128	0.0068	0.0003

Tabell 22: Prestanda för Algoritm 3 med konstant $\kappa = 32$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

κ	Upplösning	Medel av exekveringstid (s)	Varians i exekveringstid (ms)
64	16	0.0295	0.7152
64	32	0.0246	0.0092
64	64	0.0247	0.0113
64	128	0.0338	0.0023

Tabell 23: Prestanda för Algoritm 3 med konstant $\kappa = 64$ och $\alpha = 5$. Exekveringstiden och variansen är ett medelvärde av 20 st körningar.

A.2 Programkod

```

kappas = [0, 16, 32, 64, 128];
res = [0, 256, 512, 1024, 2048];
alpha = 3;
clf

x_kap = linspace(0, 128);
x_res = linspace(0, 2048);

%A2 for res 2048, mean times for different kappas (based on 20 samples)
A2_res2048 = [0, 0.8767, 1.7018, 3.7638, 8.9943];

%A3 for res 2048, mean times for different kappas (first val based on 40
    samples, others 20 samples)
A3_res2048 = [0, 0.1140, 0.2666, 0.9279, 3.7023];

%A3 for const. kappa=128, but varying res (256, 512, 1024, 2048)
A2_kap128 = [0, 0.3216, 0.7972, 2.5650, 8.9943];

%A2 for const. kappa=128, but varying res (256, 512, 1024, 2048)
A3_kap128 = [0, 0.3464, 0.6002, 1.2854, 3.7023];

%plot of varying kappas on const. res. at 2048
figure(1)
hold on
plot(kappas, A2_res2048, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(kappas, A3_res2048, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(x_kap, 0.01.*x_kap.^1.1.*log(x_kap), 'k—') %x_kap.^1.1
xlabel('\kappa');
ylabel('tid (s)');
title('Konstant upplösning, 2048 punkter')
legend('Algoritm 2', 'Algoritm 3', '0.1\cdot\kappa\cdot \log(\kappa)^{1.1}',
    'Location', 'southeast')
%%
%plot of varying res. on const. kappa at 128
figure(2)
hold on
plot(res, A2_kap128, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(res, A3_kap128, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(x_res, 0.001.*x_res.*log(x_res), 'k—')

```

```

xlabel('Upplosning');
ylabel('tid (s)');
title('Konstant \kappa=128')
legend('Algoritm 2', 'Algoritm 3', '0.001\cdot [res]\cdot \log([res])', '
    Location', 'southeast')

%%
% Plots for algorithms 1,2,3 for constant kappa

kappas = [0, 16, 32, 64];
res = [0, 16, 32, 64, 128];
alpha = 3;
clf

%alpha=3
%A1 for const. kappa=64, but varying res (0, 16, 32, 64, 128)
A1_kap64_a3 = [0, 0.2700, 1.0047, 4.1965, 17.0227];

%A2 for const. kappa=64, but varying res (0, 16, 32, 64, 128)
A2_kap64_a3 = [0, 0.0105, 0.0067, 0.0100, 0.0160];

%A3 for const. kappa=64, but varying res (0, 16, 32, 64, 128)
A3_kap64_a3 = [0, 0.0335, 0.0289, 0.0329, 0.0438];

%ALPHA=5
%A1 for const. kappa=64, but varying res (0, 16, 32, 64, 128)
A1_kap64_a5 = [0, 0.2895, 1.0248, 4.3319, 16.6281];

%A2 for const. kappa=64, but varying res (0, 16, 32, 64, 128)
A2_kap64_a5 = [0, 0.0211, 0.0241, 0.0248, 0.0300];

%A3 for const. kappa=64, but varying res (0, 16, 32, 64, 128)
A3_kap64_a5 = [0, 0.0295, 0.0246, 0.0247, 0.0338];

%plot of varying res. on const. kappa at 64, alpha=3
figure(3)
hold on
plot(res, A1_kap64_a3, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(res, A2_kap64_a3, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(res, A3_kap64_a3, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
xlabel('Upplosning');
ylabel('tid (s)');
title('Konstant \kappa=64, \alpha=3')
legend('Algoritm 1', 'Algoritm 2', 'Algoritm 3', 'Location', 'southeast')

%plot of varying res. on const. kappa at 64, alpha=3
figure(4)
hold on
plot(res, A1_kap64_a5, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(res, A2_kap64_a5, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(res, A3_kap64_a5, '-.', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
xlabel('Upplosning');
ylabel('tid (s)');
title('Konstant \kappa=64, \alpha=5')
legend('Algoritm 1', 'Algoritm 2', 'Algoritm 3', 'Location', 'southeast')

%%
% Plots for algorithms 1,2,3 for constant res

```

```

kappas = [0, 16, 32, 64];
res = [0, 16, 32, 64, 128];
clf

%alpha=3
%A1 for const. res=128, but varying kappa (0, 16, 32, 64)
A1_res128_a3 = [0, 3.4813, 7.2319, 17.0227];

%A2 for const. res=128, but varying kappa (0, 16, 32, 64)
A2_res128_a3 = [0, 0.0078, 0.0160, 0.0309];

%A3 for const. res=128, but varying kappa (0, 16, 32, 64)
A3_res128_a3 = [0, 0.0066, 0.0150, 0.0438];

%alpha=5
%A1 for const. res=128, but varying kappa (0, 16, 32, 64)
A1_res128_a5 = [0, 3.6002, 7.6909, 16.6281];

%A2 for const. res=128, but varying kappa (0, 16, 32, 64)
A2_res128_a5 = [0, 0.0072, 0.0192, 0.0300];

%A3 for const. res=128, but varying kappa (0, 16, 32, 64)
A3_res128_a5 = [0, 0.0008, 0.0068, 0.0338];

%plot of varying kappa. on const. res at 128, alpha=3
figure(5)
hold on
plot(kappas, A1_res128_a3, '.-', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(kappas, A2_res128_a3, '.-', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(kappas, A3_res128_a3, '.-', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
xlabel('Kappa');
ylabel('tid (s)');
title('Konstant upplosning 128 punkter, \alpha=3')
legend('Algoritm 1', 'Algoritm 2', 'Algoritm 3', 'Location','southeast')

%plot of varying kappa. on const. res at 128, alpha=5
figure(6)
hold on
plot(kappas, A1_res128_a5, '.-', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(kappas, A2_res128_a5, '.-', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
plot(kappas, A3_res128_a5, '.-', 'LineWidth', 1.4, 'MarkerSize', 20)
xlabel('Kappa');
ylabel('tid (s)');
title('Konstant upplosning 128 punkter, \alpha=5')
legend('Algoritm 1', 'Algoritm 2', 'Algoritm 3', 'Location','southeast')

```