Acciones libres en espacios de Cantor no conmutativos.

Eusebio Gardella

University of Oregon,
Eugene, Oregon, USA

19 de diciembre de 2013

Resumen.

Resumen.

1. El caso conmutativo.

Resumen.

1. El caso conmutativo.
2. Preliminares: C^*-álgebras y AF-álgebras.

Resumen.

1. El caso conmutativo.
2. Preliminares: C^*-álgebras y AF-álgebras.
3. La propiedad de Rokhlin.

Resumen.

1. El caso conmutativo.
2. Preliminares: C^*-álgebras y AF-álgebras.
3. La propiedad de Rokhlin.
4. Resultados en el caso no conmutativo.

El caso conmutativo.

Definición

Sea G un grupo (localmente) compacto y sea X un espacio (localmente) compacto y de Hausdorff. Una acción $G \curvearrowright X$ se dice *libre* si ningún $g \neq 1$ en G tiene puntos fijos.

El caso conmutativo.

Definición

Sea G un grupo (localmente) compacto y sea X un espacio (localmente) compacto y de Hausdorff. Una acción $G \curvearrowright X$ se dice *libre* si ningún $g \neq 1$ en G tiene puntos fijos.

Teorema

Sean G un grupo compacto y X un espacio métrico totalmente disconexo. Si G actúa libremente en X, entonces G es totalmente disconexo.

El caso conmutativo.

Definición

Sea G un grupo (localmente) compacto y sea X un espacio (localmente) compacto y de Hausdorff. Una acción $G \curvearrowright X$ se dice *libre* si ningún $g \neq 1$ en G tiene puntos fijos.

Teorema

Sean G un grupo compacto y X un espacio métrico totalmente disconexo. Si G actúa libremente en X, entonces G es totalmente disconexo.

En particular, los únicos grupos de Lie que actúan libremente en espacios totalmente disconexos son los grupos finitos.

Preliminares: C^*-álgebras.

Definición

(Gelfand-Naimark) Una C^**-álgebra* es una $*$-subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Preliminares: C^*-álgebras.

Definición

(Gelfand-Naimark) Una C^**-álgebra* es una $*$-subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Ejemplos

- Cualquier C^*-álgebra de dimensión finita es de la forma $M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_m}$.

Definición

(Gelfand-Naimark) Una C^*-*álgebra* es una $*$-subálgebra cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Ejemplos

- Cualquier C^*-álgebra de dimensión finita es de la forma $M_{n_1} \oplus \cdots \oplus M_{n_m}$.
- (Gelfand) Cualquier C^*-álgebra conmutativa con unidad es de la forma $C(X)$ para X compacto y de Hausdorff.

Definición

Sea $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión directa de C^*-álgebras, con $\phi_n\colon A_n \to A_{n+1}$. Una C^*-álgebra A junto con mapas $\phi_{n,\infty}\colon A_n \to A$ son el *límite directo* de $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si satisfacen la propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[drrr, "\psi_{1,\infty}"'] & A_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[drr, "\psi_{2,\infty}"] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
 & & & B
\end{tikzcd}$$

Preliminares: AF-álgebras.

Definición

Sea $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión directa de C^*-álgebras, con $\phi_n\colon A_n \to A_{n+1}$. Una C^*-álgebra A junto con mapas $\phi_{n,\infty}\colon A_n \to A$ son el *límite directo* de $(A_n, \phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si satisfacen la propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[drrr, "\psi_{1,\infty}"'] & A_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[drr, "\psi_{2,\infty}"] & \cdots \arrow[r] & A \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
 & & & B
\end{tikzcd}$$

Definición

Una *AF-álgebra* es una C^*-álgebra que es (isomorfa a) un límite directo de álgebras de dimensión finita, esto es, de sumas de matrices.

Teorema

$C(X)$ es una AF-álgebra si y sólo si X es un espacio métrico totalmente disconexo.

Teorema

$C(X)$ es una AF-álgebra si y sólo si X es un espacio métrico totalmente disconexo.

Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ denota el espacio de Cantor, enonces $C(\mathcal{C})$ es el límite de la sucesión $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4 \to \cdots \to C(\mathcal{C})$ con mapas dados por $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda)$.

Preliminares: AF-álgebras.

Teorema

$C(X)$ es una AF-álgebra si y sólo si X es un espacio métrico totalmente disconexo.

Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ denota el espacio de Cantor, enonces $C(\mathcal{C})$ es el límite de la sucesión $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4 \to \cdots \to C(\mathcal{C})$ con mapas dados por $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda)$.

Teorema (Elliott)

Si A y B son AF-álgebras unitales, entonces A y B son isomorfas si y sólo si

$$(K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \cong (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B]).$$

Preliminares: AF-álgebras.

Teorema

$C(X)$ es una AF-álgebra si y sólo si X es un espacio métrico totalmente disconexo.

Por ejemplo, si $\mathcal{C}$ denota el espacio de Cantor, enonces $C(\mathcal{C})$ es el límite de la sucesión $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4 \to \cdots \to C(\mathcal{C})$ con mapas dados por $\lambda \mapsto (\lambda, \lambda)$.

Teorema (Elliott)

Si A y B son AF-álgebras unitales, entonces A y B son isomorfas si y sólo si

$$(K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \cong (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B]).$$

La propiedad de Rokhlin.

La propiedad de Rokhlin.

Definición

Una acción $G \curvearrowright A$ tiene la *propiedad de Rokhlin* si existe un mapa $*$-lineal unital

$$\varphi\colon C(G) \to A$$

que es aproximadamente multiplicativo, aproximadamente equivariante y aproximadamente central. (G actúa en $C(G)$ por traslación.)

La propiedad de Rokhlin.

Definición

Una acción $G \curvearrowright A$ tiene la *propiedad de Rokhlin* si existe un mapa $*$-lineal unital

$$\varphi\colon C(G) \to A$$

que es aproximadamente multiplicativo, aproximadamente equivariante y aproximadamente central. (G actúa en $C(G)$ por traslación.)

Aproximadamente multiplicativo, aproximadamente equivariante y aproximadamente central significa que

$$\|\varphi(x)\varphi(y) - \varphi(xy)\| \quad \|\varphi(gx) - g\varphi(x)\| \quad \|\varphi(x)a - a\varphi(x)\|$$

son pequeños para x, y, a en ciertos conjuntos finitos.

Resultados en el caso no conmutativo.

Definición (de nuevo)

Una acción $G \curvearrowright A$ tiene la *propiedad de Rokhlin* si existe un mapa $*$-lineal unital $\varphi\colon C(G) \to A$ que es aproximadamente multiplicativo, aproximadamente equivariante y aproximadamente central. (G actúa en $C(G)$ por traslación.)

Resultados en el caso no conmutativo.

Definición (de nuevo)

Una acción $G \curvearrowright A$ tiene la *propiedad de Rokhlin* si existe un mapa $*$-lineal unital $\varphi\colon C(G) \to A$ que es aproximadamente multiplicativo, aproximadamente equivariante y aproximadamente central. (G actúa en $C(G)$ por traslación.)

Teorema

Si X es totalmente disconexo, entonces $G \curvearrowright X$ es libre si y sólo si $G \curvearrowright C(X)$ tiene la propiedad de Rokhlin.

Resultados en el caso no conmutativo.

Teorema (de nuevo)

Si X es totalmente disconexo, entonces $G \curvearrowright X$ es libre si y sólo si $G \curvearrowright C(X)$ tiene la propiedad de Rokhlin.

Recordemos que:

Resultados en el caso no conmutativo.

Teorema (de nuevo)

Si X es totalmente disconexo, entonces $G \curvearrowright X$ es libre si y sólo si $G \curvearrowright C(X)$ tiene la propiedad de Rokhlin.

Recordemos que:

Teorema

Si G actúa libremente en un espacio métrico totalmente disconexo, entonces G es totalmente disconexo.

La versión no conmutativa de este resultado es:

Resultados en el caso no conmutativo.

Teorema (de nuevo)

Si X es totalmente disconexo, entonces $G \curvearrowright X$ es libre si y sólo si $G \curvearrowright C(X)$ tiene la propiedad de Rokhlin.

Recordemos que:

Teorema

Si G actúa libremente en un espacio métrico totalmente disconexo, entonces G es totalmente disconexo.

La versión no conmutativa de este resultado es:

Teorema

Si G actúa en una AF-álgebra con la propiedad de Rohklin, entonces G es totalmente disconexo.

Resultados en el caso no conmutativo.

Teorema

Si G actúa en una AF-álgebra con la propiedad de Rohklin, entonces G es totalmente disconexo.

Damos una idea de la prueba cuando G es conexo (hay que probar $G = \{1\}$).

Teorema

Si G actúa en una AF-álgebra con la propiedad de Rohklin, entonces G es totalmente disconexo.

Damos una idea de la prueba cuando G es conexo (hay que probar $G = \{1\}$). Por absurdo, si G es compacto, conexo y no trivial, entonces el círculo $\mathbb{T}$ es o bien un subgrupo o un cociente de G.

Resultados en el caso no conmutativo.

Teorema

Si G actúa en una AF-álgebra con la propiedad de Rohklin, entonces G es totalmente disconexo.

Damos una idea de la prueba cuando G es conexo (hay que probar $G = \{1\}$). Por absurdo, si G es compacto, conexo y no trivial, entonces el círculo $\mathbb{T}$ es o bien un subgrupo o un cociente de G. Supóngase que $\mathbb{T} \leq G$. La restricción $\alpha|_{\mathbb{T}} \colon \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(A)$ induce la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r, "K_0(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"] & K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[u] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[l] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}). \arrow[l, "K_1(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Resultados en el caso no conmutativo.

Resultados en el caso no conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r, "K_0(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"] & K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[u] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[l] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}). \arrow[l, "K_1(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Resultados en el caso no conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r, "K_0(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"] & K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[u] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[l] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}). \arrow[l, "K_1(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Como $K_1(A) = 0$, se tiene que $K_0(\widehat{\alpha}) - \mathrm{id}_{K_0(A \rtimes \mathbb{T})}$ es inyectivo.

Resultados en el caso no conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r, "K_0(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"] & K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[u] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[l] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}). \arrow[l, "K_1(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Como $K_1(A) = 0$, se tiene que $K_0(\widehat{\alpha}) - \mathrm{id}_{K_0(A \rtimes \mathbb{T})}$ es inyectivo. Usando la propiedad de Rokhlin, se puede mostrar que cierta potencia de este mapa es cero, y por lo tanto $K_0(A \rtimes \mathbb{T}) = 0$.

Resultados en el caso no conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r, "K_0(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"] & K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[u] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[l] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}). \arrow[l, "K_1(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Como $K_1(A) = 0$, se tiene que $K_0(\widehat{\alpha}) - \mathrm{id}_{K_0(A \rtimes \mathbb{T})}$ es inyectivo. Usando la propiedad de Rokhlin, se puede mostrar que cierta potencia de este mapa es cero, y por lo tanto $K_0(A \rtimes \mathbb{T}) = 0$. Análogamente, $K_1(A \rtimes \mathbb{T}) = 0$, y por lo tanto $K_0(A) = 0$, que es una contradicción.

$$\begin{tikzcd}
K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r, "K_0(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"] & K_0(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[r] & K_0(A) \arrow[d] \\
K_1(A) \arrow[u] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}) \arrow[l] & K_1(A \rtimes \mathbb{T}). \arrow[l, "K_1(\widehat{\alpha})-\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Como $K_1(A) = 0$, se tiene que $K_0(\widehat{\alpha}) - \mathrm{id}_{K_0(A \rtimes \mathbb{T})}$ es inyectivo. Usando la propiedad de Rokhlin, se puede mostrar que cierta potencia de este mapa es cero, y por lo tanto $K_0(A \rtimes \mathbb{T}) = 0$. Análogamente, $K_1(A \rtimes \mathbb{T}) = 0$, y por lo tanto $K_0(A) = 0$, que es una contradicción.

El caso en que $\mathbb{T}$ es un cociente de G es más difícil.

Resultados en el caso no conmutativo.

Resultados en el caso no conmutativo.

Clasificación

Sean G un grupo compacto, A y B AF-álgebras unitales, y α y β acciones de G en A y B respectivamente con la propiedad de Rokhlin.

Resultados en el caso no conmutativo.

Clasificación

Sean G un grupo compacto, A y B AF-álgebras unitales, y α y β acciones de G en A y B respectivamente con la propiedad de Rokhlin. Para cada isomorfismo

$$\phi\colon (K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \to (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B])$$

Resultados en el caso no conmutativo.

Clasificación

Sean G un grupo compacto, A y B AF-álgebras unitales, y α y β acciones de G en A y B respectivamente con la propiedad de Rokhlin. Para cada isomorfismo

$$\phi\colon (K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \to (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B])$$

tal que $\phi \circ K_0(\alpha_g) = K_0(\beta_g) \circ \phi$ para todo g en G,

Clasificación

Sean G un grupo compacto, A y B AF-álgebras unitales, y α y β acciones de G en A y B respectivamente con la propiedad de Rokhlin. Para cada isomorfismo

$$\phi\colon (K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \to (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B])$$

tal que $\phi \circ K_0(\alpha_g) = K_0(\beta_g) \circ \phi$ para todo g en G, existe un isomorfismo $\theta\colon A \to B$ tal que

$$\theta \circ \alpha_g = \beta_g \circ \theta \quad \forall\, g \in G$$

y $K_0(\theta) = \phi$.

Clasificación

Sean G un grupo compacto, A y B AF-álgebras unitales, y α y β acciones de G en A y B respectivamente con la propiedad de Rokhlin. Para cada isomorfismo

$$\phi\colon (K_0(A), K_0(A)_+, [1_A]) \to (K_0(B), K_0(B)_+, [1_B])$$

tal que $\phi \circ K_0(\alpha_g) = K_0(\beta_g) \circ \phi$ para todo g en G, existe un isomorfismo $\theta\colon A \to B$ tal que

$$\theta \circ \alpha_g = \beta_g \circ \theta \quad \forall\, g \in G$$

y $K_0(\theta) = \phi$. Es decir, α y β son conjugadas si y sólo si $K_0(\alpha)$ y $K_0(\beta)$ son conjugadas.

Resultados en el caso no conmutativo.

Resultados en el caso no conmutativo.

Recordando que las AF-álgebras conmutativas son precisamente aquellas asociadas a espacios totalmente disconexos, obtenemos:

Corolario

Sean $\alpha\colon G \curvearrowright X$ y $\beta\colon G \curvearrowright X$ dos acciones libres en un espacio de Cantor. Entonces existe un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que

$$h \circ \alpha_g = \beta_g \circ h \quad \forall\, g \in G$$

si y sólo si $K_0(\alpha)$ y $K_0(\beta)$ son conjugadas.

¡Gracias!