Vektoralgebra

En inledning

Hasse Carlsson

Matematiska institutionen
Göteborgs universitet och
Chalmers tekniska högskola
Version 2005

Innehåll

1. Inledning

Du är säkert väl förtrogen med hur (reella) tal kan användas för att beskriva olika storheter inom naturvetenskap, t.ex. längd, temperatur, strömstyrka och fart. Dessa storheter kallas ofta för skalärer.

Andra storheter har både riktning och storlek. Några sådana exempel är kraft, acceleration, hastighet och magnetfält. Sedan länge har man beskrivit dessa storheter, t.ex. krafter, med hjälp av pilar (riktade sträckor) där pilen pekar i kraftens riktning och pilens längd anger kraftens storlek. Storheter med både riktning och storlek kallas vektorer. Vi skall lära oss att räkna med dessa vektorer och på så sätt skapa oss ett verktyg för att angripa problem av många olika slag.

Syftet med detta kompendium är att på ett förhoppningsvis begripligt sätt beskriva början av denna teori.

2. Geometriska vektorer

Med ledning av diskussionen i inledningen skall vi definiera vektorer och operationer på vektorer i både planet och rummet. Definitionen bygger på geometriska resultat om t.ex. parallellitet och likformighet. Omvänt kan vi därför genom att räkna med vektorer bevisa geometriska resultat.

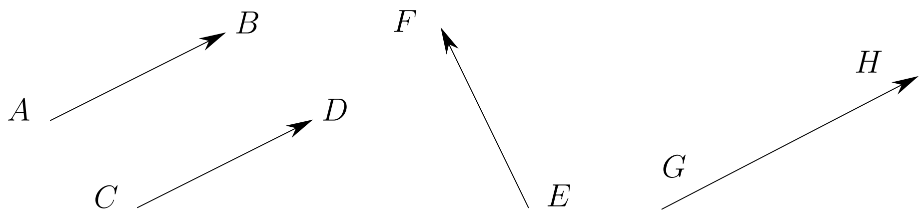
Om man studerar hastigheten hos en båt (i synnerhet om vågorna är små) är det naturligt att bara hålla reda på hur den rör sig med avsende på två riktningar; nord-sydlig och öst-västlig. En båt kan t.ex. köra med 12 knop i nordnordvästlig riktning. Om man i stället studerar ett flygplan behöver man också hålla reda på en tredje riktning; nämligen den vertikala. Planet kan stiga 30° med hastigheten $572\,\mathrm{km/tim}$ i sydostlig riktning. Man säger därför att planet (inte flygplanet) är tvådimensionellt och rummet tredimensionellt och vi använder ofta beteckningarna $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ för planet respektive rummet.

2.1. Definition av vektorer

Vi skall definiera vektorer i planet och i rummet. Diskussionen i denna och de följande två paragraferna gäller både för vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Definition 2.1. *Två punkter A och B bestämmer en* riktad sträcka *från A till B som betecknas $\overrightarrow{AB}$.*

Varje riktad sträcka bestämmer i sin tur en vektor $\mathbf{u}$. *Två sträckor som är lika långa och lika riktade bestämmer samma vektor.*



I figuren är sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ lika långa och lika riktade och bestämmer alltså samma vektor $\mathbf{u}$. Vi skriver $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Sträckan $\overrightarrow{EF}$ är lika lång som $\overrightarrow{AB}$ men inte parallell med $\overrightarrow{AB}$. Så om $\mathbf{v} = \overrightarrow{EF}$ är $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sträckan $\overrightarrow{GH}$ är lika riktad men inte lika lång som $\overrightarrow{AB}$, så om $\mathbf{w} = \overrightarrow{GH}$ är $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$. Eftersom $\overrightarrow{EF}$ och $\overrightarrow{GH}$ varken är lika långa eller lika riktade så är också $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$.

Nollvektorn är den vektor som fås då start- och slutpunkt sammanfaller. Nollvektorn betecknas $\mathbf{0}$ och alltså är $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

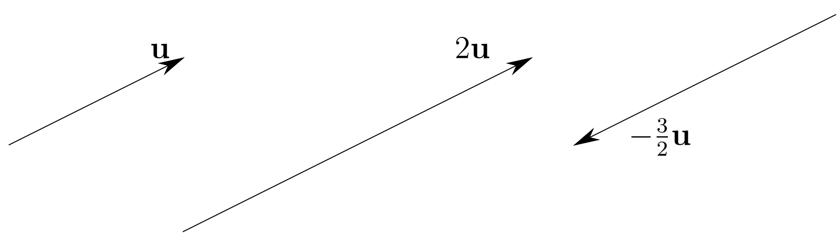
Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u}$ den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$, dvs. $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$.

Längden av vektorn $\mathbf{u}$ betecknas $|\mathbf{u}|$.

2.2. Operationer på vektorer

Multiplikation av en vektor med en skalär

Definition 2.2. *Om t är ett reellt tal och $\mathbf{u}$ är en vektor så är $t\mathbf{u}$ den vektor som har längden $|t||\mathbf{u}|$ och är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$.*



Exempel 2.1.

(1) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (2) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$

(3) $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla t och (4) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ för alla $\mathbf{u}$.

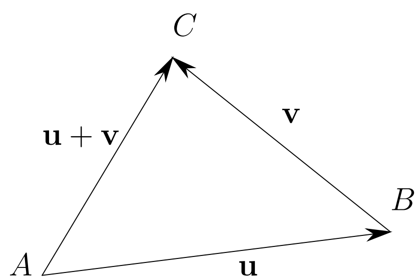
$\square$

Vektorerna $\mathbf{u}$ och $t\,\mathbf{u}$ är alltså parallella och om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så kan varje vektor $\mathbf{v}$ som är parallell med $\mathbf{u}$ skrivas $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$ för något t.

Addition av vektorer

Vi skall nu definiera addition av vektorer. Definitionen görs så att kraftparallellogramlagen blir uppfylld.

Definition 2.3. *Låt* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *vara två vektorer. Välj tre punkter* A, B *och* C *så att* $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ *och* $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$*. Då är* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$*.*

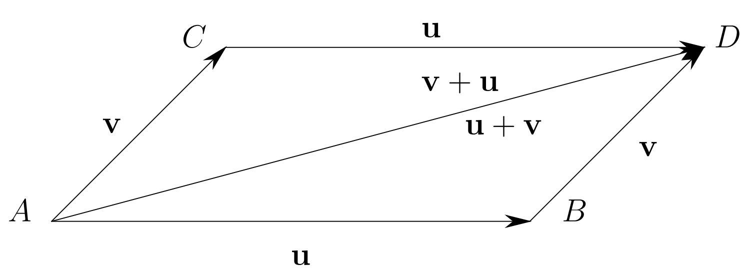


Räkneregler

(1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad$ (*kommutativitet*),
(2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad$ (*associativitet*),
(3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
(4) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad$ (*distributivitet*),
(5) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u} \quad$ (*distributivitet*),
(6) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$.

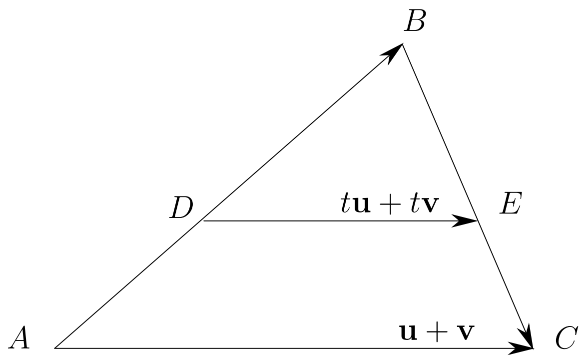
Vi visar bara (1) och (4) då $t > 0$, och låter läsaren själv fundera ut varför de övriga är sanna.

Kommutativiteten följer ur följande figur.



I parallellogrammen $ABCD$ är $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Så $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

Att (4) gäller följer av likformighet. Antag att $t > 0$ och betrakta trianglarna ABC och DBE där $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, $t\mathbf{u} = \overrightarrow{DB}$ och $t\mathbf{v} = \overrightarrow{BE}$.



Trianglarna ABC och DBE är likformiga med förhållandet $1 : t$. (Varför?) Så $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DE}$ är lika riktade och $|\overrightarrow{DE}| = t\,|\overrightarrow{AC}|$. Det betyder att $\overrightarrow{DE} = t\,\overrightarrow{AC}$ och

$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}\ .$$

$\square$

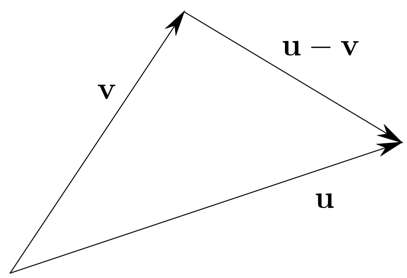
Anmärkning 2.1. Figuren i beviset av (1) visar att addition av vektorer uppfyller parallellogramlagen för krafter. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är krafter så är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ krafternas resultant; om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ påverkar en partikel så blir effekten densamma som när partikeln bara påverkas av kraften $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. $\square$

Subtraktion av vektorer

Definition 2.4. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Vi har $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ty om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$.

Observera också att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ löser ekvationen $\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{u}$ eftersom $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{v} - \mathbf{v}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Så om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de startar i samma punkt är $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ den vektor som startar i spetsen av $\mathbf{v}$ och slutar i spetsen av $\mathbf{u}$.

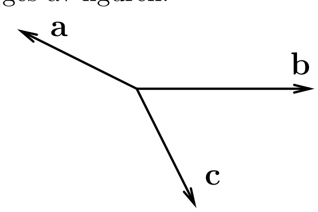


Man kan också se det genom att skriva $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{u}$.

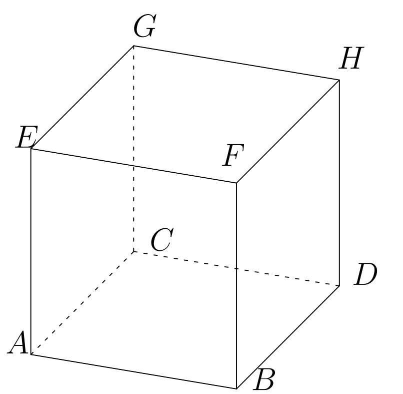
Anmärkning 2.2. Figurerna i bevisen ovan är ritade tvådimensionellt. (I papperets plan). Detta är ingen inskränkning eftersom två vektorer alltid ligger i ett plan. Däremot gör inte alltid tre vektorer det, så associativa lagen kan inte åskadliggöras med en tvådimensionell figur.

$\square$

Övning 2.1. Bestäm (a) $\mathbf{2a} + \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ och (c) $\frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, där $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ges av figuren:



Övning 2.2. Låt $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ i följande kub.



Bestäm tal x, y och z så att $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ då

(a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{EH}$, (c) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG}$,

(d) $\mathbf{v} = \overrightarrow{HA}$, och (e) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HA}$.

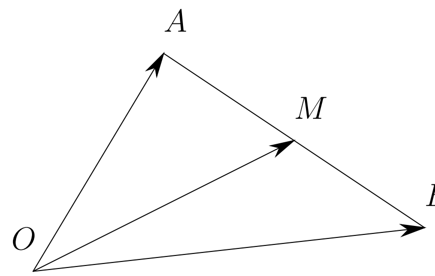
Övning 2.3. En motorbåt går i stillastående vatten med farten 6 m/s. Båten körs i en älv där vattnet strömmar rakt söderut med farten 2 m/s.
(a) Bestäm båtens hastighet (storlek och fart) om den styrs i rakt östlig riktning.
(b) Vilken kurs skall båten hålla för att röra sig rakt öster ut?

2.3. Geometriska tillämpningar

I det här avsnittet ger vi några tillämpningar av vektoralgebra på geometriska problem.

Exempel 2.2. Låt O, A och B vara tre punkter. Om M är mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{AB}$ så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

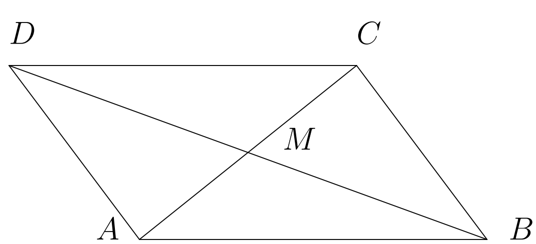


Eftersom $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$ gäller

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}\,.$$

$\square$

Exempel 2.3. Diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.



Påståendet innebär att diagonalernas skärningspunkt är mittpunkt både på diagonalen AC och på diagonalen BD.

Låt M vara mittpunkten på diagonalen BD. För att visa påståendet räcker det att visa att M också är mittpunkt på diagonalen AC. (Varför?) Enligt förra exemplet är

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

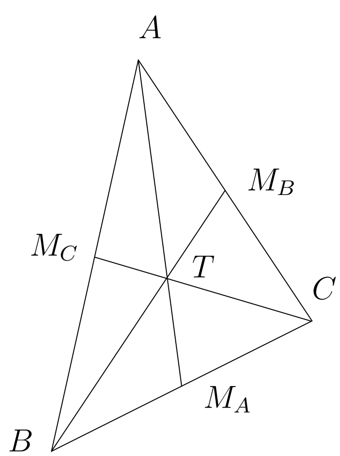
Men $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ så

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC},$$

dvs. M är mittpunkt på diagonalen AC. □

Exempel 2.4. (En triangels tyngdpunkt.)

En median i en triangel är sträckan från ett hörn till motstående sidas mittpunkt. Vi skall visa att medianerna skär varandra i en punkt som delar medianen i förhållandet 2 : 1 från spetsen räknat. Denna punkt kallas triangelns tyngdpunkt. (Varför då?)



Låt O vara en godtycklig punkt, M_A, M_B och M_C vara triangelsidornas mittpunkter (se figur) och T vara den punkt på linjen AM_A som delar AM_A i förhållandet 2 : 1. Då gäller $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_A}$. Exempel 2.2 ger att $\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Så

$$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Detta ger

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Om $\overrightarrow{BT}_B = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{BM}_B$ och $\overrightarrow{CT}_C = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{CM}_C$ får vi på samma sätt (eller ännu enklare på grund av symmetri) att

$$\overrightarrow{OT}_B = \overrightarrow{OT}_C = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \ .$$

Så

$$\overrightarrow{OT}_B = \overrightarrow{OT}_C = \overrightarrow{OT} \ \text{ och } T_B = T_C = T$$

och alltså ligger T på alla medianerna.

$\square$

Observera om O är en godtycklig punkt och T triangelns tyngdpunkt så har vi visat att

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \ .$$

Anmärkning 2.3. Beviset ovan är ett ”orakelbevis”. Hur kunde vi veta att tyngdpunkten delar medianen i förhållandet $2:1$?

Här ger vi ett alternativt bevis som inte utnyttjar detta faktum. Låt som förut O vara en godtycklig punkt, M_A, M_B och M_C vara triangelsidornas mittpunkter och T skärningspunkten mellan AM_A och BM_B. Eftersom $\overrightarrow{AM}_A$ och $\overrightarrow{AT}$ är lika riktade gäller $\overrightarrow{AT} = a\overrightarrow{AM}_A$ för någon skalär a. På samma sätt gäller $\overrightarrow{BT} = b\,\overrightarrow{BM}_B$.

Eftersom M_A och M_B är mittpunkter på sträckan BC respektive AC så gäller $\overrightarrow{AM}_A = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ och $\overrightarrow{BM}_B = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$. Så

$$\overrightarrow{AT} = \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \ \text{ och } \ \overrightarrow{BT} = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) \ .$$

Detta ger

$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{BA} + \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{a}{2}\ \overrightarrow{AC} \ ,$$

men också

$$\overrightarrow{BT} = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = b\,\overrightarrow{BA} + \frac{b}{2}\ \overrightarrow{AC} \ .$$

Så

$$\left(\frac{a}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{a}{2}\ \overrightarrow{AC} = b\,\overrightarrow{BA} + \frac{b}{2}\ \overrightarrow{AC}$$

och

$$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right)\overrightarrow{AB} = \frac{b-a}{2}\ \overrightarrow{AC} \ .$$

Men vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är *inte* parallella och därför är

$$\left(\frac{a}{2}+b-1\right)=\frac{b-a}{2}=0$$

vilket ger $a=b=\dfrac{2}{3}$.

Nu har vi själva visat att att tyngdpunkten delar medianen i förhållandet $2:1$ och behöver inte hänvisa till något orakel.

$\square$

Övning 2.4. Visa att om $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ så är M mittpunkt på sträckan AB.

Övning 2.5. Visa att om $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$ så är T tyngdpunkt i triangeln ABC.

Övning 2.6. Punkterna D, E och F delar triangeln ABC så att $\overrightarrow{AB}=3\,\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}=3\,\overrightarrow{BE}$ och $\overrightarrow{CA}=3\,\overrightarrow{CF}$. Visa att trianglarna ABC och DEF har samma tyngdpunkt.

Övning 2.7. Låt M vara mittpunkten på sträckan mellan två motstående kanters mittpunkter i tetraedern $ABCD$.

(a) Visa att

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\ .$$

(b) Hur många par av motstående kanter finns det?

(c) Visa att punkten M i (a) inte beror på vilka kanter vi valt, dvs. sträckan mellan mittpunkterna på motstående kanter skär varandra i en punkt.

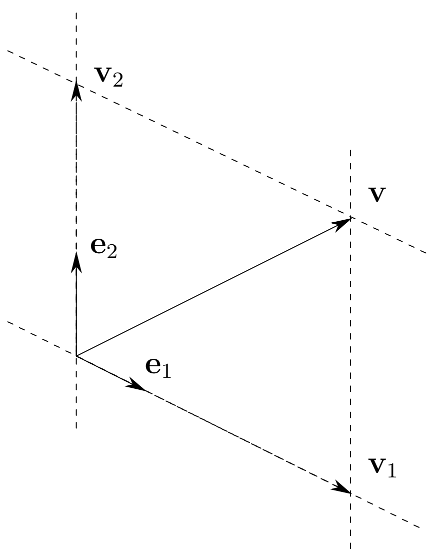
3. Baser och koordinater

För att göra det mer praktiskt att räkna med geometriska vektorer i planet och rummet skall vi se hur man kan representera dem som par respektive tripplar av reella tal. På så sätt kan man räkna med vektorer ”som vanligt” fast med två respektive tre kopior av $\mathbb{R}$.

3.1. Baser i planet

Definition 3.1. *Två vektorer i planet* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *som inte är parallella kallas en* bas*.*

Låt $\mathbf{v}$ vara en godtycklig vektor. Placera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}$ så att de börjar i samma punkt. Drag linjer genom $\mathbf{v}$:s ändpunkter parallella med $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ och låt $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ vara sidorna i den parallellogram som bildas.



Då är $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$. Eftersom $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är parallella med $\mathbf{e}_1$ respektive $\mathbf{e}_2$ finns tal x och y så att $\mathbf{v_1} = x\,\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{v_2} = y\,\mathbf{e}_2$. Alltså är $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och vi har visat ena halvan av följande sats.

Sats 3.2. *Om* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *är en bas i planet så kan varje vektor* $\mathbf{v}$ *entydigt skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2.$$

(Talen x och y kallas för $\mathbf{v}$:s koordinater *i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.)*

Det återstår att visa entydigheten. Så antag att $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2$. Vi måste visa att $x = x'$ och $y = y'$. Men om t.ex $x \neq x'$ så är $\mathbf{e}_1 =$

$-\dfrac{y-y'}{x-x'}\,\mathbf{e}_2$, dvs. $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är parallella. Men detta är en motsägelse eftersom $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ är en bas, så $x = x'$. ■

Anmärkning 3.1. I resonemanget ovan har vi implicit antagit att varken $\mathbf{e}_1$ eller $\mathbf{e}_2$ är nollvektorn. För att inte behöva behandla nollvektorn speciellt använder vi i fortsättningen konventionen att $\mathbf{0}$ är parallell med (och vinkelrät mot) varje vektor. □

Om basvektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är vinkelräta (eller *ortogonala*) och har längden ett kallas de *ortonormerade*. I fortsättningen arbetar vi oftast med ortonormerade basvektorer.

Om det är klart vilka basvektorerna är, skriver vi helt kort $\mathbf{v} = (x, y)$ i stället för $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och kallar x och y för $\mathbf{v}$:s koordinater. Om $(x, y) = (x', y')$ så ger entydigheten i Sats 3.2 att $x = x'$ och $y = y'$.

Sats 3.3. *Om* $\mathbf{v} = (x, y)$, $\mathbf{u} = (x', y')$ *och* $t \in \mathbb{R}$ *så gäller*

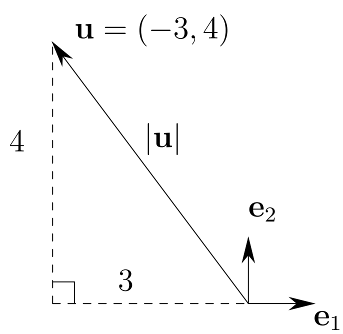
$$t\,\mathbf{v} = t\,(x, y) = (tx, ty)$$

och

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Bevis. Satsen följer enkelt från räknereglerna för vektorer. Vi har $t\,\mathbf{v} = t(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2) = tx\,\mathbf{e}_1 + ty\,\mathbf{e}_2 = (tx, ty)$ och $\mathbf{v} + \mathbf{u} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2 = (x + x')\,\mathbf{e}_1 + (y + y')\,\mathbf{e}_2 = (x + x', y + y')$. ■

Exempel 3.1. Antag att $\mathbf{u} = (-3, 4)$ i en ortonormerad bas. Hur lång är $\mathbf{u}$?



Lösning. Pythagoras sats ger (se figuren) $|\mathbf{u}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ så $|\mathbf{u}| = 5$.

Med samma resonomang ser vi att om $\mathbf{u} = (x, y)$ så är

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

□

Exempel 3.2. Krafterna $\mathbf{F_1} = (-1, 2)$ och $\mathbf{F_2} = (2, -3)$ (i Newton) verkar på en partikel. Hur stor är deras sammanlagda verkan?
Lösning. Den resulterande kraften är $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = (-1, 2) + (2, -3) = (1, -1)$ så $|\mathbf{F}| = \sqrt{1+1}\,\mathrm{N} = \sqrt{2}\,\mathrm{N}$. □

Övning 3.1. Antag att $\mathbf{u} = (1, 2)$ och att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 4)$. Vad är då $\mathbf{v}$?

Övning 3.2. Antag att $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2)$. Bestäm $\overrightarrow{BC}$.

Övning 3.3. Sätt $\mathbf{v} = (1, 1)$, $\mathbf{w} = (0, 1)$. Visa att $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ utgör en bas i $\mathbb{R}^2$.

Övning 3.4. Låt $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ha koordinaterna $(1, 2)$ respektive $(1, 1)$ i en given bas. Visa att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ också är en bas i planet. Vilka är de nya koordinaterna för den vektor som har de gamla koordinaterna $(2, 1)$?

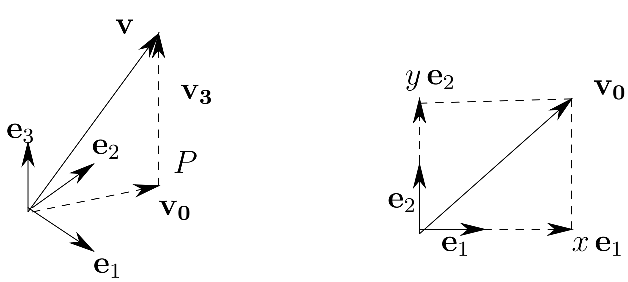
3.2. Baser i $\mathbb{R}^3$

Definition 3.4. *Tre vektorer* $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *utgör en* bas *för* $\mathbb{R}^3$ *om de inte ligger i ett plan.*

Sats 3.5. *Om* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *är en bas i rummet kan varje vektor* $\mathbf{v}$ *entydigt skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3\ .$$

Bevis. Placera $\mathbf{v}$ och basvektorerna så att de börjar i samma punkt. Drag en linje parallell med $\mathbf{e}_3$ som går genom spetsen på $\mathbf{v}$. Den skär planet som innehåller $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ i en punkt P. (Linjen skär planet eftersom $\mathbf{e}_3$ inte ligger i planet.) Då är $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_3}$, se figuren. $\mathbf{v_3}$ är parallell med $\mathbf{e}_3$, så $\mathbf{v_3} = z\,\mathbf{e}_3$.



$\mathbf{v_0}$ ligger i planet som spänns av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Observera att $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ inte är parallella. (Varför?) Med hjälp av Sats 3.1 ser vi att $\mathbf{v_0} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och alltså $\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_3} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$, och existensen är klar.

För att visa entydigheten antar vi att

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 = x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2 + z'\,\mathbf{e}_3\ .$$

Vi måste visa att $x = x'$, $y = y'$ och $z = z'$. Antag tex. att $z \neq z'$. Då gäller

$$\mathbf{e}_3 = -\frac{x - x'}{z - z'}\,\mathbf{e}_1 - \frac{y - y'}{z - z'}\,\mathbf{e}_2 \,,$$

vilket betyder att $\mathbf{e}_3$ ligger i samma plan som $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$. Detta motsäger att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en bas, och alltså är $z = z'$.

■

Som i $\mathbb{R}^2$ skriver vi kortfattat $\mathbf{v} = (x, y, z)$ och vi har räknereglerna

$$t\,(x, y, z) = (tx, ty, tz) \quad \text{och} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')\,.$$

En bas är *ortonormerad* om alla basvektorerna har längden ett och är vinkelräta mot varandra. Med hjälp av Pythagoras sats ser vi (Hur då?) att i en ortonormerad bas ges en vektors längd av

$$|\mathbf{u}|^2 = |(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

.

Övning 3.5. Bestäm $\overrightarrow{BC}$ om $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$ och $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 3)$.

Övning 3.6. Sätt $\mathbf{u} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$. Beräkna $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

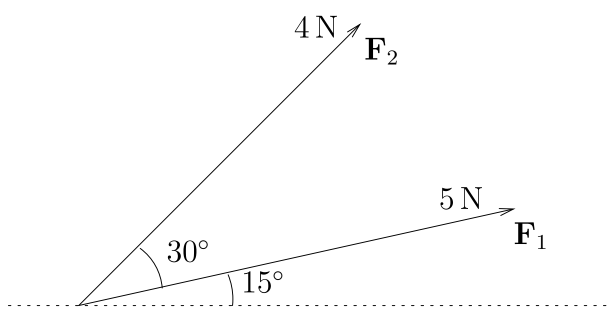
Övning 3.7. Bestäm ett tal a så att vektorerna $(a, 2 + a, 6)$ och $(2, 1, -3)$ är parallella.

Övning 3.8. Bestäm ett tal t så att vektorerna
(a) $(1, 2)$ och (t, t^2), (b) $(t, 1 - t, 1 + t)$ och $(2, 0, 4)$
och (c) $(t, 2t^2, 3t)$ och $(1, 6, t)$
blir parallella.

Övning 3.9. Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som har längden 1 och är parallell med $(-1, 2, 2)$.

Övning 3.10. Bestäm längderna av vektorerna
(a) $(-1, -2, -3)$, (b) $(1, 1, 1)$ och (c) $(-1, 2, 2)$.

Övning 3.11. Krafterna $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ verkar på en partikel. Bestäm storlek och riktning av krafternas resultant om
(a) $\mathbf{F}_1 = (1, -3, 4)$ och $\mathbf{F}_2 = (5, 9, 2)$,
(b) ges av följande figur:

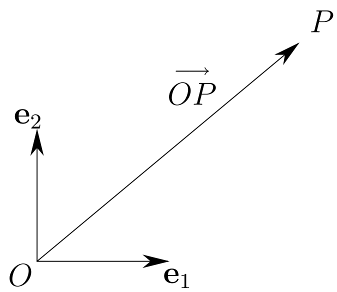


(ON-bas, SI-enheter.)

Övning 3.12. Bildar vektorerna $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ och $(1, 1, 1)$ en bas för $\mathbb{R}^3$? Motivera ditt svar.

3.3. Koordinatsystem

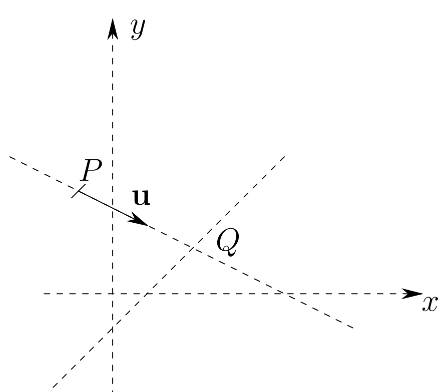
I det här avsnittet skall vi beskriva punkter med hjälp av koordinater. Detta gör vi genom att fixera en punkt O som vi kallar *origo*. En punkt P bestämmer en vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ och omvänt om vi har en vektor $\mathbf{u}$ så finns det en punkt P så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$. Vektorn $\overrightarrow{OP}$ kallas för P:s ortsvektor.



Vi har alltså identifierat punkten P med vektorn $\overrightarrow{OP}$. Om $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ (i en viss bas) får P samma kordinater; $P = (x, y, z)$. För origo gäller $O = (0, 0, 0)$. (Varför?)

Exempel 3.3. Bestäm koordinaterna för den vektor $\overrightarrow{PQ}$ som går från $P = (1, -2, 1)$ till $Q = (-2, 1, 0)$.
Lösning. Vi har $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$. Så $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P = (-2, 1, 0) - (1, -2, 1) = (-3, 3, -1)$. $\square$

Exempel 3.4. Genom punkten $P = (-1, 3)$ dras en linje parallell med vektorn $\mathbf{u} = (2, -1)$. Var skär denna linjen $x - y = 1$?
Lösning. Kalla skärningspunkten Q.



Eftersom $\overrightarrow{PQ}$ är parallell med $\mathbf{u}$ finns ett tal t med $\overrightarrow{PQ} = t\,\mathbf{u}$ eller $Q = P + t\,\mathbf{u} = (-1,3) + t(2,-1) = (2t-1, 3-t)$. Men att Q ligger på linjen $x - y = 1$ betyder att $2t - 1 - (3-t) = 1$. Denna ekvation har lösningen (Räkna själv!) $t = 5/3$. Alltså är $Q = (-1,3) + \dfrac{5}{3}(2,-1) = \dfrac{1}{3}(7,4)$. □

Vi har alltså sett att två punkter P och Q bestämmer en vektor $\overrightarrow{PQ}$ som beräknas genom

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P\,.$$

Ett annat sätt att skriva detta är

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q\,;$$

om vi startar i punkten P och går längs vektorn $\overrightarrow{PQ}$ hamnar vi i Q.

Övning 3.13. Antag att $\overrightarrow{OP} = (2,3)$, $\overrightarrow{OQ} = (3,4)$. För vilken punkt R gäller det att $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$?

Övning 3.14. En triangel har hörn i $A = (1,2,3)$, $B = (3,5,7)$ och $C = (2,-9,-5)$. Bestäm vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{CA}$.

Övning 3.15. Vad är mittpunkten på sträckan vars ändpunkter är
(a) $(1,2,3)$ och $(3,0,-1)$, (b) (x,y,z) och (x_1,y_1,z_1) ?

Övning 3.16. Bestäm mittpunkten på sträckan mellan de båda punkterna $(1,2,3)$ och $(4,4,4)$.

Övning 3.17. En triangel har hörnen $(1,2,3)$, $(2,3,1)$ och $(3,-2,2)$. Bestäm triangelns tyngdpunkt.

Övning 3.18. Bestäm avståndet mellan följande par av punkter
(a) $(1,0),(0,1)$ (b) $(1,0,0),(0,0,1)$ och (c) $(1,1,2),(2,1,1)$.

Övning 3.19. Visa att punkterna $(1,1,-1),(1,-1,1)$ och $(-1,1,1)$ bildar hörn i en liksidig triangel.

Övning 3.20. Bestäm en punkt i planet så att den tillsammans med $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,-3)$ bildar en parallellogram.

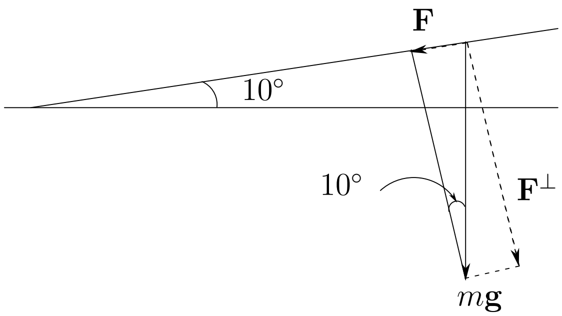
Övning 3.21. Undersök om punkterna $(1,1,2)$, $(0,3,2)$, $(2,2,1)$ och $(1,4,1)$ är hörn i en parallellogram.

Övning 3.22. Det finns tre parallellogrammer som har hörn i punkterna $(1,2,3)$, $(1,3,4)$ och $(2,3,5)$. Bestäm diagonalernas skärningspunkt i dessa tre parallellogrammer.

4. Skalärprodukt

I det här avsnittet skall vi behandla problem som har att göra med vinklar mellan vektorer. Ett viktigt tillämpningsområde är fysiken och vi börjar med två sådana exempel.

Exempel 4.1. Stina som är ute och cyklar står på krönet av en brant backe. Hon rullar utför backen som är femtio meter lång och lutar tio grader.Hur fort rullar hon vid foten av backen?
(Bortse från friktion och luftmotstånd).
Lösning. Antag att Stina med cykel väger m kg. Hon påverkas endast av tyngdkraften. Arbetet som uträttas är produkten av storleken av tyngdkraftens verkan i backens riktning ($\mathbf{F}$) och backens längd.



($\mathbf{F}^{\perp}$ som är vinkelrät mot backen bidrar inte till arbetet.)

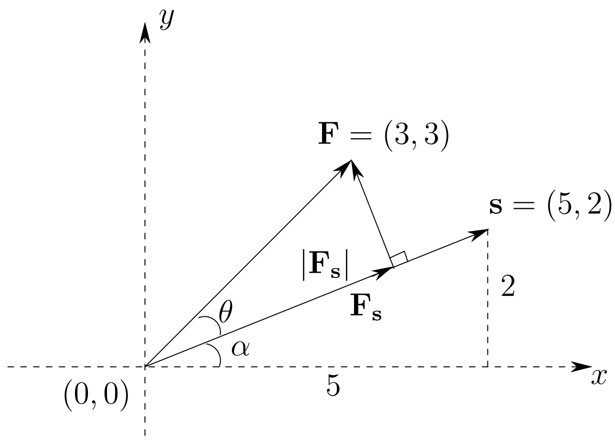
Från figuren ser vi att $\sin 10° = |\mathbf{F}|/mg$ eller $|\mathbf{F}| = mg \sin 10°$. Så $W = |\mathbf{F}| \cdot 50 = 50mg \sin 10°$. Detta arbete omvandlas till rörelseenergi. Om v är den sökta hastigheten är rörelseenergin $\frac{1}{2}mv^2$. Detta ger $W = \frac{1}{2}mv^2$ eller $v^2 = 100g \sin 10° \approx 982 \sin 10° \approx 170,5$ och $v \approx 13$ (m/s). (13 m/s=47 km/tim.)

□

Exempel 4.2. En partikel rör sig under påverkan av kraften $(3, 3)$ rätlinjigt från origo till punkten $(5, 2)$ i ett ortonormerat koordinatsystem. Hur stort arbete uträttas?

(SI-enheter)

Lösning 1. Det uträttade arbetet är produkten av vägen och kraftens projektion i vägens riktning; $W = |\mathbf{F_s}| \cdot |\mathbf{s}|$.



Vektorn $(3,3)$ bildar 45°:s vinkel med x-axeln så $\theta = 45 - \alpha$. Vinkeln α uppfyller $\tan\alpha = 2/5$ så $\alpha = \arctan(2/5)$. Alltså är $|\mathbf{F_s}| = |\mathbf{F}|\cos\theta = \sqrt{9+9}\cos\theta = 3\sqrt{2}\cos\theta$. Vägen $\mathbf{s}$ har längden $|\mathbf{s}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$, och vi får $W = 3\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{29} = 21$. (Exakt! Kan du visa det?)

Anmärkning 4.1. Observera att $W = 21 = 3{\cdot}5{+}3{\cdot}2$, dvs. arbetet är summan av produkterna av kraften och vägens x och y-koordinater. Detta är ingen tillfällighet, och ett av syftena med införandet av skalärprodukt är att visa att det alltid är så. $\square$

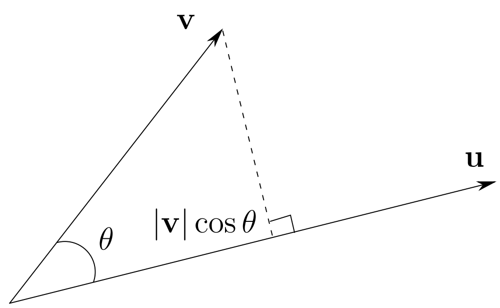
Lösning 2. Vi angriper problemet genom att införa en ny ortonormerad bas $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2})$, där $\mathbf{f_1}$ pekar i samma riktning som $\mathbf{s}$ och $\mathbf{f_2}$ i den ortogonala riktningen $(-2,5)$. $\Big($$(5,2)$ och $(-2,5)$ är vinkelräta. Kontrollera det genom att använda Pythagoras sats på triangeln $(0,0), (5,2), (-2,5)$. Vi skall strax se hur skalärprodukten kan användas för att se att $(5,2)$ och $(-2,5)$ är vinkelräta.$\Big)$ Vi normaliserar vektorerna $(5,2)$ och $(-2,5)$ och sätter $\mathbf{f_1} = (5,2)/\sqrt{29}$ och $\mathbf{f_2} = (-2,5)/\sqrt{29}$. I denna bas är $(5,2)_e = \sqrt{29}\,\mathbf{f_1} = (\sqrt{29}, 0)_f$. Här betecknar $(x,y)_e$ koordinaterna i den ursprungliga basen och $(x,y)_f$ koordinaterna i den nya. Om$(x,y)_f$ är koordinaterna för $(3,3)_e$ så gäller $(3,3)_e = (x,y)_f = x\,\mathbf{f_1} + y\,\mathbf{f_2} = (5x-2y, 2x+5y)_e/\sqrt{29}$. (Rita figur!) Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3\sqrt{29} \\ 2x + 5y = 3\sqrt{29}\,. \end{cases}$$

Om vi multiplicerar den första ekvationen med 5 och den andra med 2 och adderar får vi $29x = 21\sqrt{29}$ eller $x = 21/\sqrt{29}$. Så (Varför?) $W = x|\mathbf{s}| = 21/\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = 21$.

□

Efter dessa preludier är det dags att definiera skalärprodukten mellan två vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Med *vinkeln* θ mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, båda skilda från $\mathbf{0}$, menas den minsta vinkel som bildas då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de börjar i samma punkt.



Definition 4.1. Skalärprodukten *av vektorerna* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *är*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \,,$$

där θ *är vinkeln mellan* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Om $\mathbf{u}$ *eller* $\mathbf{v}$ *är* $\mathbf{0}$ *så är* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Observera att definitionen är gjord så att $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ i förra exemplet.

Räkneregler.
(1) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (*kommutativitet*),
(2) $(t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
(3) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (*distributivitet*),
(4) $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$,
(5) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ om och endast om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta.

Du bör själv övertyga dig om att (1),(2),(4) och (5) gäller. Jag återkommer till (3) i slutet av paragrafen. □

För att praktiskt räkna med skalärprodukt behöver vi veta vad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ blir i koordinater. För att uttrycket skall bli enkelt antar vi att basen är ortonormerad.

Sats 4.2. *Låt* $\mathbf{u} = (x, y, z)$ *och* $\mathbf{v} = (x', y', z')$ *i ett ortonormerat koordinatsystem. Då gäller*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = xx' + yy' + zz' .$$

I $\mathbb{R}^2$ *gäller* $(x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$.

Bevis. Eftersom basen är ortonormerad gäller $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. Så

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \cdot (x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \\ &= xx'\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + yy'\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + zz'\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &+ (xy' + yx')\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + (xz' + x'z)\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + (yz' + y'z)\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= xx' + yy' + zz' . \end{aligned}$$

■

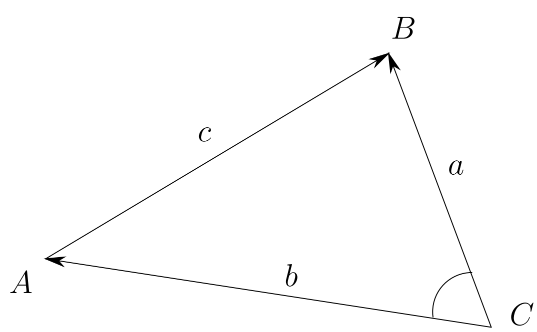
Exempel 4.2. (Fortsättning.)
Lösning 3. Vi har $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (3, 3) \cdot (5, 2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21$. □

Exempel 4.3. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, -2)$.
Lösning. Vi har $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2^2) + 1^2 + (-2)^2} = 3$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(-2) + 2 \cdot 1 + 2(-2) = -4$. Eftersom $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$ får vi $\cos \theta = -4/(3 \cdot 3) \approx -0,4444$ och $\theta \approx 116,4°$.

□

Exempel 4.4. I Exempel 4.2, Lösning 2 använde vi att vektorerna $(5, 2)$ och $(-2, 5)$ är vinkelräta. Med hjälp av skalärprodukt ser vi detta genast eftersom $(5, 2) \cdot (-2, 5) = 5(-2) + 2 \cdot 5 = 0$. □

Exempel 4.5. Cosinusatsen.
I en triangel gäller $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

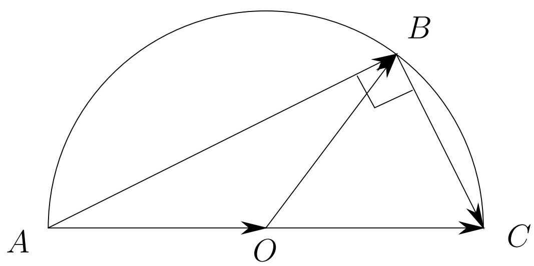


Bevis. Eftersom $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ och $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}= ab\cos C$ så är

$$\begin{aligned} c^2 &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}= (\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA} \\ &= a^2-2ab\cos C+b^2\,. \end{aligned}$$

□

Exempel 4.6. Periferivinkeln i en halvcirkel är rät.



Bevis. Vi skall visa att $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}= 0$. Men $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ och $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$. Så

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

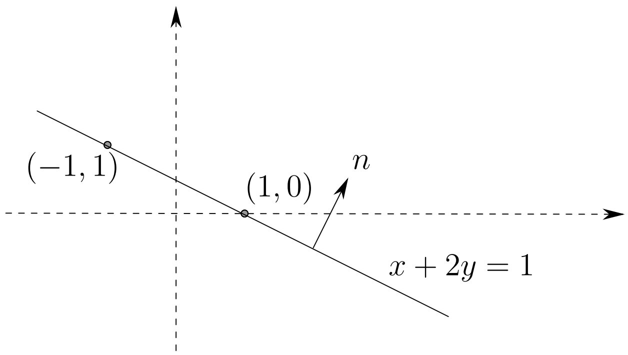
$$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}\,.$$

Eftersom $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ får vi om cirkelns radie är R

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}= R^2-R^2=0\,.$$

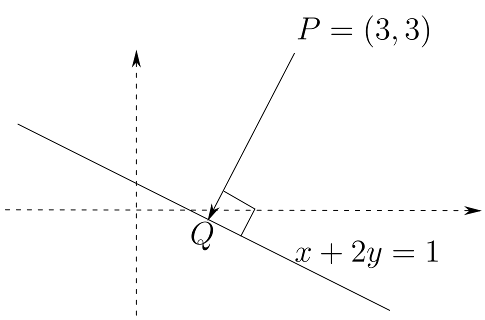
□

Exempel 4.7. Bestäm en normalvektor till linjen $x + 2y = 1$.
(En normalvektor är en vektor som är vinkelrät mot linjen.)



Lösning. Punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 1)$ ligger på linjen, så $\mathbf{v} = (1, 0) - (-1, 1) = (2, -1)$ är en riktningsvektor till linjen. Men om $\mathbf{n} = (1, 2)$ är $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = (1, 2) \cdot (2, -1) = 2 - 2 = 0$, så $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta. Alltså är $\mathbf{n} = (1, 2)$ en normalvektor. $\square$

Exempel 4.8. Bestäm avståndet från punkten $(3, 3)$ till linjen $x + 2y = 1$.
Lösning. Med avståndet d från en punkt P till en linje menas det kortaste av avstånden $|P - Q|$ då Q ligger på linjen. Detta antas då $\overrightarrow{PQ}$ är vinkelrät mot linjen. (Varför?)

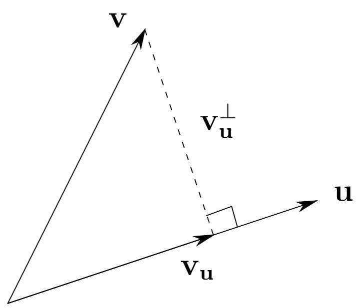


Enligt förra exemplet är $(1, 2)$ vinkelrät mot linjen så $\overrightarrow{PQ} = t(1, 2)$ för något t. Men $Q = P + \overrightarrow{PQ} = (3+t, 3+2t)$ som ligger på linjen om $(3+t)+2(3+2t) = 1$, dvs. om $t = -8/5$. Så $\overrightarrow{PQ} = -8/5(1, 2)$ och $d = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{8}{5}\sqrt{1+4} = 8/\sqrt{5} \approx 3,13$.

Punkten Q kallas för *ortogonala projektionen* av P med avseende på linjen $x + 2y = 1$. $\square$

Ortogonal projektion.

Vi skall nu diskutera hur man kan dela upp en vektor $\mathbf{v}$ i två komponenter; $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$; där $\mathbf{v_u}$ är parallell med en given vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v_u^\perp}$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$.



$\mathbf{v_u}$ kallas för $\mathbf{v}$:s *ortogonala projektion* på $\mathbf{u}$.

Om $\mathbf{v_u}$ är parallell med $\mathbf{u}$ så är $\mathbf{v_u} = t\mathbf{u}$, och genom att skalärmultiplicera båda leden i $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + \mathbf{v_u^\perp}$ med $\mathbf{u}$ får vi

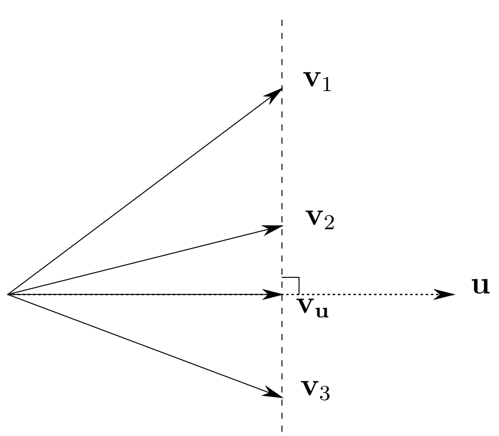
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u^\perp} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u} = t\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = t|\mathbf{u}|^2 \,.$$

Så $t = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/|\mathbf{u}|^2$ och

$$\mathbf{v_u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2}\, \mathbf{u}\,. \tag{4.1}$$

Skriver vi nu $\mathbf{v} = \mathbf{v_u} + (\mathbf{v} - \mathbf{v_u})$ har vi den önskade uppdelningen eftersom $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v_u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

En viktig egenskap hos $\mathbf{v_u}$ är att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u}$.



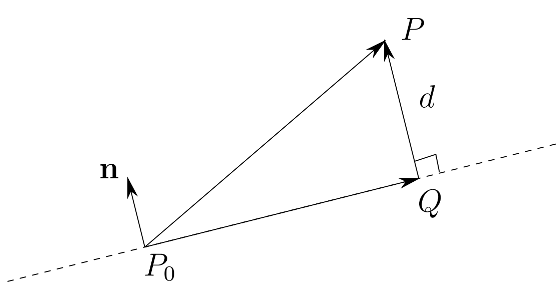
I figuren ovan är alla skalärprodukter $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i$ lika och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v_u}$ för alla i.

Exempel 4.9. Om $\mathbf{v} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ i en ortonormerad bas så är $x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1$, $y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2$ och $z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3$.
Bevis av den första likheten. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1$
$= x\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = x.$ □

Exempel 4.10. Avståndsformeln.
Avståndet d från punkten $P = (x, y)$ till linjen $ax + by = c$ ges av

$$d = \frac{|ax + by - c|}{|(a, b)|}.$$

Bevis. Låt $P_0 = (x_0, y_0)$ vara en godtycklig punkt på linjen och Q ortogonala projektionen av P på linjen. Vektorn $\mathbf{n} = (a, b)$ är en normalvektor till linjen, jämför Exempel 4.7 och Övning 4.10.



Avståndet till linjen är $d = |\overrightarrow{QP}|$. Men $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{P_0P}_{\mathbf{n}}$, $\overrightarrow{P_0P}$:s ortogonala projektion på $\mathbf{n}$. Eftersom $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0)$ ger (4.1)

$$d = |\overrightarrow{P_0P}_{\mathbf{n}}| = \left| \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} \right| = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax + by - c|}{|(a, b)|},$$

eftersom $ax_0 + by_0 = c$. (P_0 ligger på linjen.)

Tillämpar vi detta på Exempel 4.8 får vi

$$d = \frac{|3 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

□

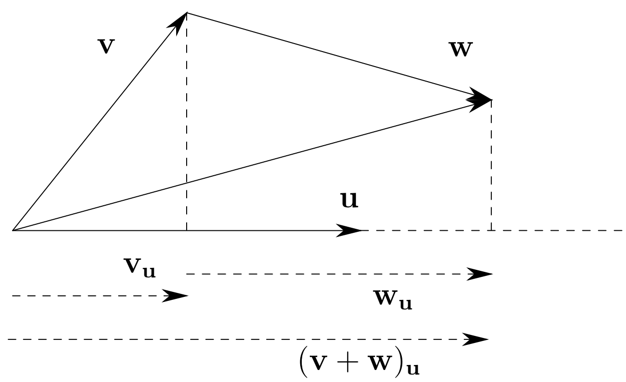
Vi avslutar den här paragrafen med att visa distributiva lagen för skalärprodukt:
Med hjälp av ortogonal projektion kan vi reducera distributiva lagen för

skalärprodukt till den för reella tal. Vi har $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})_{\mathbf{u}}$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{u}}$, så det räcker att visa att

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w})_{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}} \tag{4.2}$$

och

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{u}}\,. \tag{4.3}$$



För att se att (4.2) gäller skriver vi $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{\perp} = (\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}) + (\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{\perp})$. Men eftersom $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}$ och $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}$ båda är parallella med $\mathbf{u}$ är $\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}$ det också. På samma sätt är $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}^{\perp} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}^{\perp}$ vinkelrät mot $\mathbf{u}$. Detta bevisar (4.2).

För att bevisa (4.3) observerar vi att vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{u}}$ och $\mathbf{w}_{\mathbf{u}}$ är parallella så påståendet är väsentligen distributiva lagen för reella tal. Mer precist om vi låter s och t uppfylla $\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = s\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}_{\mathbf{u}} = t\mathbf{u}$ så gäller

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{w}_{\mathbf{u}}) &= \mathbf{u} \cdot (s\mathbf{u} + t\mathbf{u}) = (s+t)|\mathbf{u}|^2 = s|\mathbf{u}|^2 + t|\mathbf{u}|^2 \\ &= \mathbf{u} \cdot s\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot t\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{u}}\,. \end{aligned}$$

■

Övning 4.1. Vilka av följande par av vektorer är ortogonala?
(a) $(-1, 2, 2)$, $(2, 2, -1)$, (b) $(2, 1, 1)$, $(2, 1, -5)$ och (c) $(1, 1, 1)$, $(2, -1, -1)$.

Övning 4.2. Bestäm vinkeln mellan vektorerna (a) $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$,
(b) $\mathbf{u} = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 4)$ och (c) $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.

Övning 4.3. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{2b} - \mathbf{a}$ då $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$ och $\mathbf{b} = (3, 4, 0)$.

Övning 4.4. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot
(a) $(2, -3)$, (b) (a, b), och (c) $(3, 4, -2)$.

Övning 4.5. Bestäm t så att vektorerna $(t, 2t^2, 3t)$ och $(-1, 1, t)$ blir vinkelräta.

Övning 4.6. En triangel har hörnen $(2, 1, 3)$, $(-1, 4, 2)$ och $(0, 6, 5)$. Är triangeln rätvinklig?

Övning 4.7. Kraften $(3, -4, 2)$ verkar på en kropp som rör sig rätlinjigt från punkten $(-1, 3, 2)$ till

(a) $(1, 4, 5)$, (b) $(-3, 2, 3)$ och (c) (0,5,3).

Beräkna ändringen i partikelns rörelseenergi.

Övning 4.8. Visa att $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Övning 4.9. (a) Bestäm avståndet från punkten $(1, 2)$ till linjen $y = 5$.
(b) Bestäm avståndet från punkten $(1, 2)$ till linjen $x + y = 5$.

Övning 4.10. Visa att (a, b) är en normalvektor till linjen $ax + by = c$.

Övning 4.11. Vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ har längderna 3, 4 och 2. Hur stor är vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$?

Övning 4.12. Låt $\mathbf{u}$ vara en fix vektor med $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och antag att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\,.$$

Måste $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Motivera ditt svar!

Övning 4.13. Antag att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

för alla $\mathbf{u}$. Måste $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Motivera ditt svar!

Övning 4.14. Två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ har längderna 2 respektive 3 och vinkeln mellan dem är $60°$. Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{a}$ på $\mathbf{b}$ och tvärtom.

Övning 4.15. Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har samma längd. Vad kan du säga om $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

Övning 4.16. Visa att en triangels höjder skär varandra i en punkt.

Övning 4.17. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{u}'$ vara parallella (och ingen $\mathbf{0}$). Visa att då gäller $\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}'}$.

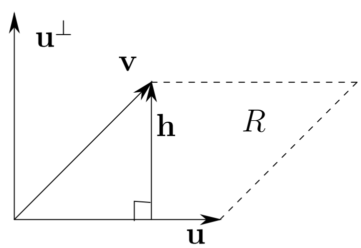
Övning 4.18. Ange en ortogonalbas i $\mathbb{R}^3$ som innehåller vektorn $(1, 2, 3)$. Bestäm sedan koordinaterna i denna bas för den vektor som har standardkoordinaterna $(1, 1, 1)$.

5. Area, volym och vektorprodukt

I detta kapitel är alla baser ortononomerade.

5.1. Arean av en parallellogram

Låt $\mathbf{u} = (a, b)$ och $\mathbf{v} = (c, d)$ vara sidor i en parallellogram R.



Vi skall härleda en formel för R:s area $A = |\mathbf{u}||\mathbf{h}|$. Om $\mathbf{u}^\perp = (-b, a)$ så är $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp = -ab + ba = 0$ dvs. $\mathbf{u}^\perp$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$. Alltså är $\mathbf{h}$ den vinkelräta projektionen av $\mathbf{v}$ på $\mathbf{u}^\perp$; $\mathbf{h} = \mathbf{v}_{\mathbf{u}^\perp}$ Enligt (4.1) gäller

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^\perp}{|\mathbf{u}^\perp|^2}\mathbf{u}^\perp .$$

Eftersom $|\mathbf{u}^\perp| = |\mathbf{u}|$ är $|\mathbf{h}| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^\perp|/|\mathbf{u}|$ och

$$A = |\mathbf{u}||\mathbf{h}| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^\perp| = |(c, d) \cdot (-b, a)| = |ad - bc| .$$

Vi inför beteckningen

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ kallas för en 2×2-determinant. Vi har alltså visat

Sats 5.1. *Arean av parallellogrammen med sidorna (a, b) och (c, d) är absolutbeloppet av determinanten*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} .$$

Vi skall strax härleda en analog formel för en parallellepiped i $\mathbb{R}^3$ och vi passar på att definiera 3×3-determinanter genom

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Övning 5.1. Bestäm arean av

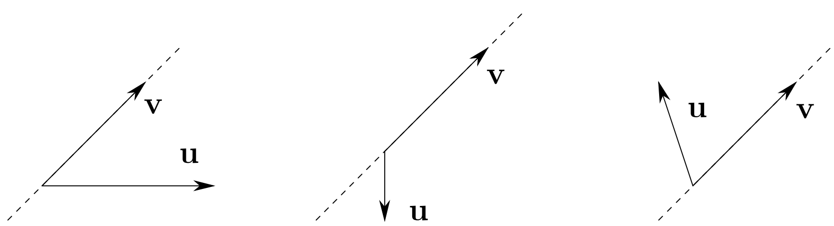
(a) den parallellogram som har hörnen $(1,1)$, $(3,4)$, $(5,2)$ och $(7,5)$

(b) triangeln med hörnen $(-2,-2)$, $(2,1)$ och $(4,1)$.

5.2. Orientering

Sats 5.1 säger att 2×2-determinanten ger arean med tecken. För att kunna avgöra tecknet på determinanten inför vi begreppet *orientering*.

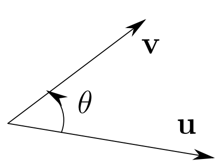
Definition 5.2. *Två ickeparallella vektorer* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *(i denna ordning) i planet är* högerorienterade *om* $\mathbf{u}$ *ligger till höger om* $\mathbf{v}$ *(när de börjar i samma punkt).*



(a) (b) (c)

I fallen (a) och (b) är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ högerorienterade; i fall (c) är de *vänsterorienterade*.

Ett annat sätt att uttrycka att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är högerorienterade är att den kortaste vägen att vrida $\mathbf{u}$ så att den blir lika riktad som $\mathbf{v}$ är moturs.

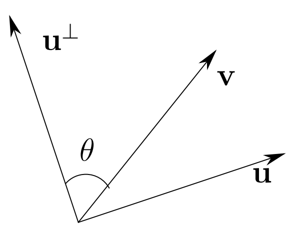


För att kunna ta hänsyn till orientering när vi räknar i koordinater måste basen vara orienterad.

Definition 5.3. *En ortonormerad bas* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *kallas för en* standardbas *om* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *är högerorienterade.*

I en standardbas ger 2×2-determinanten arean med tecken; om $\mathbf{u} = (a, b)$ och $\mathbf{v} = (c, d)$ är högerorienterade så är $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ och om de är vänsterorienterade så är $A = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Beviset bygger på Övning 5.2. Med hjälp av övningen ser vi att om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är högerorienterade så är vinkeln mellan $\mathbf{u}^\perp = (-b, a)$ och $\mathbf{v}$ spetsig. (Både $\mathbf{u}^\perp$ och $\mathbf{v}$ ligger till vänster om $\mathbf{u}$.)



Så $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathbf{u}^\perp \cdot \mathbf{v} \geq 0$ och $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

I det vänsterorienterade fallet är vinkeln trubbig och $A = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. □

Övning 5.2. Visa att $\mathbf{u} = (a, b)$ och $\mathbf{u}^\perp = (-b, a)$ är högerorienterade.

5.3. Vektorprodukt

Till två vektorer i rummet skall vi definiera en ny vektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, *vektorprodukten* (eller *kryssprodukten*) av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Vektorprodukten har många tillämpningar. I matematik används den bl.a. för att beräkna arean av en parallellogram i rummet och för att bestämma en normalvektor till två givna vektorer. I fysik används den t.ex. för att beskriva mekaniskt moment och magnetfältet kring en elektrisk laddning. Vi skall ge några sådana tillämpningar i slutet av detta kapitel.

Vektorprodukten beror på orienteringen av $\mathbb{R}^3$ och vi börjar därför med

Definition 5.4. *Tre vektorer* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *och* $\mathbf{w}$ *(i denna ordning) i* $\mathbb{R}^3$ *är* höger-orienterade *om de pekar som tumme, pekfinger och långfinger på höger hand.*

Andra sätt att uttrycka att $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är högerorienterade är
1. Vektorn $\mathbf{w}$ pekar i riktningen av en högergängad skruv som skruvas kortaste vägen från $\mathbf{u}$ till $\mathbf{v}$.
2. Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är högerorienterade (i det plan som spänns av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$) sedda från spetsen av $\mathbf{w}$.

Definition 5.5. *Givet två vektorer* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *i rummet så definieras deras* vektorprodukt $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *som den vektor som uppfyller*
(a) $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ *är arean av parallellogrammen med sidorna* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$ *,*
(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *är vinkelrät mot* $\mathbf{u}$ *och* $\mathbf{v}$
och
(c) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *och* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *är högerorienterade.*

För att praktiskt kunna räkna med vektorprodukten behöver vi räkneregler och kunna beräkna den i koordinater. Eftersom vektorprodukten i sin definition bygger på orientering kommer dess uttryck i koordinater att bero på basens orientering. Som i $\mathbb{R}^2$ gör vi följande

Definition 5.6. *En* standardbas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *för* $\mathbb{R}^3$ *är en högerorienterad ortonormerad bas.*

I resten av detta kapitel arbetar vi alltid i en standardbas.

Sats 5.7. (Räkneregler för vektorprodukt)
(1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ *(antikommutativitet),*
(2) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
(3) $(t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$,
och
(4) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ *(distributivitet).*

Bevis. (1),(2) och (3) är lätta och lämnas åt läsaren. Beviset av distributiva lagen är svårare och vi väntar med det till §5.4. ∎

Sats 5.8. (Vektorprodukten i koordinater)
Om $\mathbf{u} = (x, y, z)$ *och* $\mathbf{v} = (x', y', z')$ *i en standardbas* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *så gäller*

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') \,. \tag{5.1}$$

Anmärkning 5.1. Determinanten ovan består inte av tal men om vi jämför med definitionen av 3×3-determinanten har vi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix},$$

vilket stämmer med högra ledet i Sats 5.8. □

Bevis. Vi har $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ och eftersom $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ är en standardbas gäller $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$. (Varför?) Så Sats 5.7 ger

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \times (x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \\ &= xx'\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + xy'\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + xz'\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 \\ &+ yx'\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + yy'\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + yz'\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\ &+ zx'\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + zy'\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + zz'\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \\ &= (yz' - zy')\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + (zx' - xz')\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + (xy' - yx')\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 \\ &= (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')\,. \end{aligned}$$

■

Vi avslutar detta avsnitt med att bevisa (5.1) direkt då $\mathbf{u} = (x, y, 0)$ och $\mathbf{v} = (x', y', 0)$ ligger i xy-planet.

Antag först att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är högerorienterade (som vektorer i xy-planet). Enligt §5.1 är arean av parallellogramen med sidorna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$. Så $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = xy' - yx'$. Basvektorn $\mathbf{e}_3$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_3$ är högerorienterade. (Varför?) Så $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (xy' - yx')\mathbf{e}_3 = (0, 0, xy' - yx')$, vilket stämmer med (5.1). Fallet då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vänsterorienterade lämnas åt läsaren. □

Exempel 5.1. Beräkna arean av triangeln med hörnen $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 3)$ och $(2, 3, 4)$.
Lösning. $\mathbf{u} = (1, 2, 3) - (1, 1, 0) = (0, 1, 3)$ och $\mathbf{v} = (2, 3, 4) - (1, 1, 0) = (1, 2, 4)$ är sidor i triangeln. Arean av paralellogrammen med sidorna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Nu är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-2, -3, -1)\ ,$$

och alltså $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$. Triangelns yta är hälften av parallellogrammens så triangelns yta är $\sqrt{14}/2 \approx 1,87$.

□

Övning 5.3. Beräkna vektorprodukten mellan vektorerna

(a) $(1,0,-1)$, $(1,1,1)$, (b) $(1,3,-2)$, $(3,2,1)$ och (c) $(-1,2,2)$, $(2,-1,2)$.

Övning 5.4. Beräkna arean av den triangel som har hörnen $(0,1,2)$, $(2,1,3)$ och $(4,3,1)$.

Övning 5.5. Visa att $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = -2\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

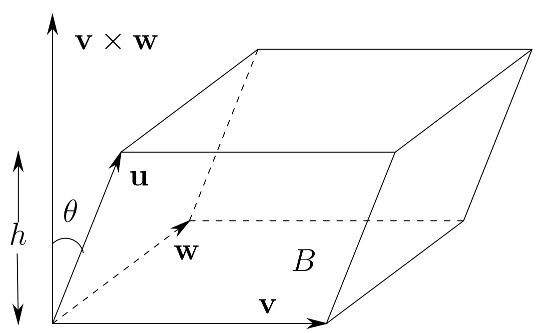
Övning 5.6. Låt $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara högerorienterade. Visa att då är $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})$ och $(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v})$ också högerorienterade, men $(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$, $(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u})$ och $(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w})$ är vänsterorienterade.

Övning 5.7. Lös Exempel 5.1 genom att utnyttja att arean är $\frac{1}{2}|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$ där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

5.4. Volymen av en parallellepiped

Sats 5.9. *Volymen av parallellepipeden med kanterna* $\mathbf{u} = (x,y,z), \mathbf{v} = (x',y',z')$ *och* $\mathbf{w} = (x'',y'',z'')$ *ges av absolutbeloppet av uttrycket*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$



Om $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är högerorienterade är determinanten positiv, annars negativ.

Bevis. Volymen är $V = Bh$ där B är basytan och h höjden. Enligt definitionen av vektorprodukten är $B = |\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$. Dessutom är $h = |\mathbf{u}|\cos\theta$. I figuren är $\mathbf{u},\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ högerorienterade så θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, och alltså är $V = |\mathbf{u}||\mathbf{v}\times\mathbf{w}|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Om vektorerna i stället är vänsterorienterade är θ vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $-(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ och vi får $V = -\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Så $V = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$.

För att beräkna $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ observerar vi att

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right),$$

så

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = x\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & z' \\ x'' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

■

Följdsats 5.10.

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).$$

Bevis. De tre termernas absolutbelopp är alla V. Enligt Övning 5.6 har $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$, $(\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})$ och $(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v})$ samma orientering och termerna har därför alla samma tecken. ■

Vi kan nu bevisa Sats 5.7, (4).

Följdsats 5.11. (Distributiva lagen för vektorprodukt)

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}.$$

Bevis. Låt $\mathbf{V} = \mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ och $\mathbf{H} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$. Vi skall visa att $\mathbf{V}=\mathbf{H}$. För detta räcker det att visa att $\mathbf{x}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{H}$ för alla $\mathbf{x}$. (Varför?) Men enligt Följdsats 5.10 så gäller

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})) = (\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{u}).$$

Nu ger distributiva lagen för *skalärprodukt* att

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{V} = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{u}) + \mathbf{w}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{u}).$$

På liknande sätt är

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}) = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})+\mathbf{x}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{u})+\mathbf{w}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{u}).$$

■

Övning 5.8. Bestäm volymen av den parallellepiped som bestäms av vektorerna $(1,0,2)$, $(1,1,1)$ och $(2,1,-3)$.

Övning 5.9. Bestäm volymen av tetraedern med hörnen $(2,2,1)$, $(3,3,2)$, $(4,2,1)$ och $(3,5,1)$.

5.5. Fysikaliska tillämpningar

Vridmoment

Antag att en partikel i punkten P påverkas av en kraft F. Då definieras *momentvektorn* kring en punkt O genom

$$\mathbf{m} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F} .$$

Exempel 5.2. (En stel kropps jämvikt.)

Antag att krafterna $\mathbf{F_1}, \ldots, \mathbf{F_n}$ i tur och ordning påverkar en stel kropp i punkterna $P_1, \ldots, P_n$. Kroppen är i jämvikt om krafternas resultant $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \ldots + \mathbf{F_n}$ och det *totala momentet* kring O, $\mathbf{m} = \mathbf{m_1} + \ldots + \mathbf{m_n} = \overrightarrow{OP}_1 \times \mathbf{F_1} + \ldots + \overrightarrow{OP}_n \times \mathbf{F_n}$ båda är $\mathbf{0}$;

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{0} .$$

Det är viktigt att observera att detta villkor inte beror på valet av punkt O. Vi har nämligen följande

Sats 5.12. *Om krafternas resultant* $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *så beror inte det totala momentet kring* O *på punkten* O.

Bevis. Låt O' vara en annan punkt och $\mathbf{m}'$ motsvarande totala moment;

$$\mathbf{m}' = \overrightarrow{O'P}_1 \times \mathbf{F_1} + \ldots + \overrightarrow{O'P}_n \times \mathbf{F_n} .$$

Då gäller

$$\begin{aligned}\mathbf{m}' &= (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}_1) \times \mathbf{F_1} + \ldots + (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}_n) \times \mathbf{F_n} \\ &= \overrightarrow{O'O} \times (\mathbf{F_1} + \ldots + \mathbf{F_n}) + \overrightarrow{OP}_1 \times \mathbf{F_1} + \ldots + \overrightarrow{OP}_n \times \mathbf{F_n} \\ &= \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{0} + \mathbf{m} = \mathbf{m} .\end{aligned}$$

■

□

Exempel 5.3. En stålskiva har hörnen $P_1 = (1, -1, 1)$, $P_2 = (2, 1, 4)$, $P_3 = (-1, 1, 2)$ och $P_4 = (4, -2, 3)$. I dessa hörn verkar krafterna $\mathbf{F_1} = (5, -7, -10)$, $\mathbf{F_2} = (4, 4, 4)$, $\mathbf{F_3} = (-8, 4, 4)$ respektive $\mathbf{F_4} = (-1, -1, 2)$. Är skivan i jämvikt?

Lösning. Resultanten $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ eftersom $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} = \mathbf{0}$.

Vi väljer att beräkna momentet kring punkten P_1. Eftersom $\overrightarrow{P_1P_1}= \mathbf{0}$ är $\mathbf{m_1} = \mathbf{0}$. Vidare är $\overrightarrow{P_1P_2}= (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{P_1P_3}= (-2, 2, 1)$ och $\overrightarrow{P_1P_4}= (3, -1, 2)$ så

$$\mathbf{m_2} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \mathbf{F_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-4, 8, -4) \ ,$$

$$\mathbf{m_3} = \overrightarrow{P_1P_3} \times \mathbf{F_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -8 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (4, 0, 8) \ ,$$

och

$$\mathbf{m_4} = \overrightarrow{P_1P_4} \times \mathbf{F_4} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -8, -4) \ .$$

Alltså är $\mathbf{m} = \mathbf{m_1} + \mathbf{m_2} + \mathbf{m_3} + \mathbf{m_4} = \mathbf{0}$, så skivan är i jämvikt. $\square$

Magnetfält

En laddad partikel i rörelse ger upphov till ett magnetfält $\mathbf{B}$ i rummet. Om partikeln har laddningen q (coloumb), befinner sig i punkten Q och rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$ (m/s) så ges magnetfältet i en punkt P av (Rita figur!)

$$\mathbf{B}(P) = kq \frac{\mathbf{v} \times \overrightarrow{QP}}{\left|\overrightarrow{QP}\right|^3} \ , \tag{5.2}$$

där $k = 10^{-7}\,\mathrm{m\,kg/C^2}$. (Magnetfältet har enheten kg/sC som också kallas Tesla.)

Exempel 5.4. Beräkna magnetfältet kring en oändligt lång rak ledare med strömmen $\mathbf{I}$.

Lösning. Strömmen uppkommer genom att laddningar rör sig i ledaren. Om laddningstätheten är q (coloumb/m) och laddningarna rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$ så är $\mathbf{I} = q\mathbf{v}$ ($\mathbf{I}$ i ampere).

Låt P vara en punkt på avståndet r från ledaren. Vi inför standardkoordinater så att strömmen rör sig i positiv riktning längs x-axeln och $P = (0, 0, r)$. För att beräkna magnetfältet $\mathbf{B}(P)$ delar vi upp x-axeln i små bitar och summerar bidragen. Den del av ledaren som ligger mellan x och $x + dx$ innehåller laddningen qdx. Om $Q_x = (x, 0, 0)$ så ger enligt (5.2) denna del bidraget

$$\mathbf{B}_x = kq \frac{\mathbf{v} \times \overrightarrow{Q_xP}}{\left|\overrightarrow{Q_xP}\right|^3} = \frac{kq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} (v, 0, 0) \times (-t, 0, r) dx \ .$$

Men

$$(v,0,0)\times(-t,0,r) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v & 0 & 0 \\ -t & 0 & r \end{vmatrix} = (0,-vr,0)\ ,$$

så

$$\mathbf{B}_x = -\frac{kqvr}{(x^2+r^2)^{3/2}}dx\ \mathbf{e}_2 = -\frac{krI}{(x^2+r^2)^{3/2}}dx\ \mathbf{e}_2\ .$$

Det totala bidraget är därför

$$\mathbf{B}(P) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{B}_x = -krI\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}}\ \mathbf{e}_2\ .$$

Men nu är

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{2}{r^2}\ , \tag{5.3}$$

och alltså

$$\mathbf{B}(P) = -\frac{2kI}{r}\ \mathbf{e}_2\ .$$

För den läsare som är van vid variabelbyte i integraler kan (5.3) bevisas med hjälp av följande kalkyl.

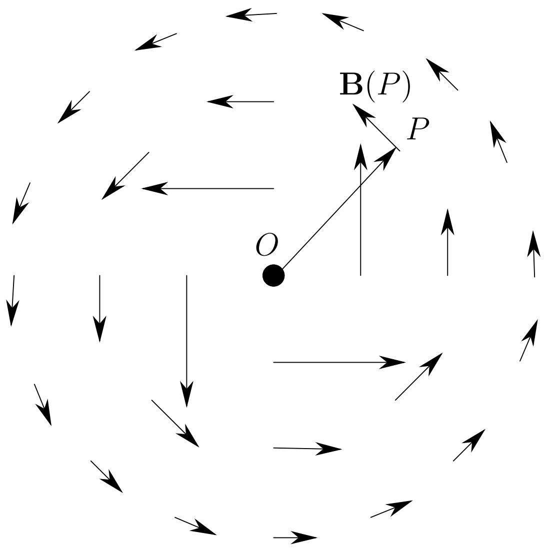
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \begin{bmatrix} x=rt \\ dx=rdt \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{rdt}{(r^2t^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{A}{r^2}$$

och

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \begin{bmatrix} t=\tan\theta \\ dt = d\theta/\cos^2\theta \\ 1+t^2 = 1/\cos^2\theta \end{bmatrix} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\ .$$

Diskussionen ovan kan sammanfattas i följande figur.



Figuren visar magnetfältet i ett plan vinkelrätt mot ledaren. Strömmen är riktad rakt mot läsaren. Magnetfältets styrka beror bara på strömstyrkan I och avståndet r till ledaren och det är proportionellt mot I/r. Magnetfältet är riktat vinkelrätt mot vektorerna $\overrightarrow{OP}$ och $\mathbf{I}$ på så sätt att $\mathbf{I}$, $\overrightarrow{OP}$ och $\mathbf{B}$ är högerorienterade.

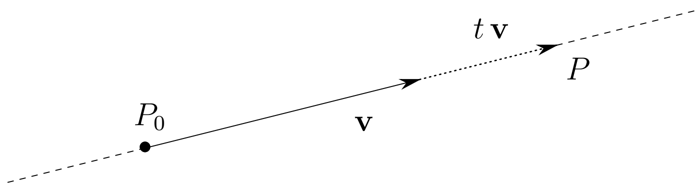
Övning 5.10. En triangulär stålskiva med hörnen $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ och $(1, 1, 1)$ hänger i tre stålvajrar. Dragkraften i dessa är i tur och ordning
(a) $(-3, -3, -3)$, $(2, 0, 0)$ och $(1, 3, 3)$;
(b) $(-3, -3, -3)$, $(2, 2, 2)$ och $(1, 0, 0)$;
(c) $(-3, -3, -3)$, $(2, 1, 3)$ och $(1, 2, 0)$.
Hänger skivan still?

□

6. Linjer och plan

6.1. Räta linjen i planet

En (rät) linje i $\mathbb{R}^2$ bestäms av en punkt P_0 på linjen och en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ som anger linjens riktning. Vektorn $\mathbf{v}$ kallas för en *riktningsvektor* för linjen.



En godtycklig punkt på linjen kan skrivas

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,,$$

för något reellt tal t. Om $P_0 = (x_0, y_0)$,$\mathbf{v} = (a, b)$ och $P = (x, y)$ så gäller $(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b)$ eller

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb\,. \end{cases}$$

Detta kallas för linjens ekvation på *parameterform.*

Vi kan eliminera parametern t genom att multiplicera den första ekvationen med b, den andra med $-a$ och addera. Detta ger

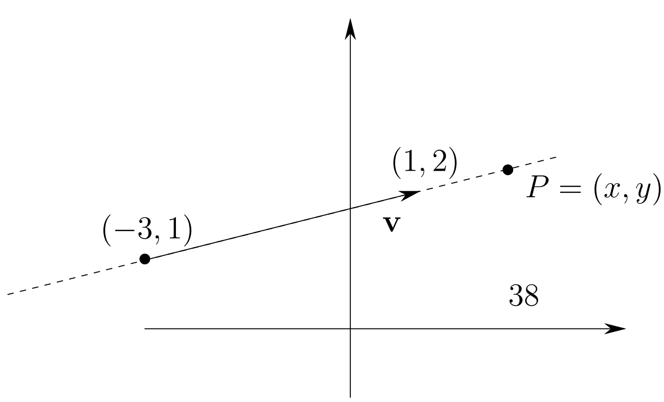
$$bx - ay = bx_0 - ay_0$$

eller med andra beteckningar

$$Ax + By = C\,.$$

Detta kallas ibland för linjens ekvation på *normalform.* (Jämför Övning 4.10.)

Exempel 6.1. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(-3, 1)$.
Lösning.



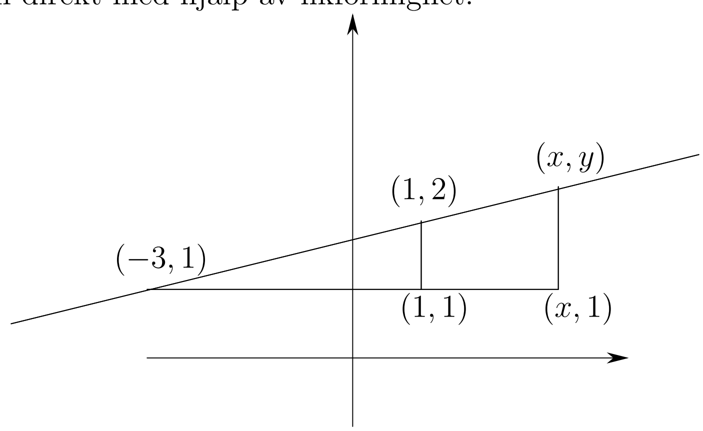
Vektorn $\mathbf{v}$ från $(-3,1)$ till $(1,2)$ är en riktningsvektor för linjen. Vi har $\mathbf{v} = (1,2) - (-3,1) = (4,1)$. Så om $P_0 = (-3,1)$ ger $P = P_0 + t\mathbf{v}$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 + t\,. \end{cases}$$

Multiplicerar vi den sista ekvationen med -4 och adderar får vi

$$x - 4y = -7\,.$$

Om vi bara är intresserade av linjens ekvation på normalform kan vi få den direkt med hjälp av likformighet:



Trianglarna med hörnen $(-3,1),(1,1),(1,2)$ och $(-3,1),(x,1)(x,y)$ är likformiga så kvoterna av kateternas längder är lika dvs.

$$\frac{y-1}{x-(-3)} = \frac{2-1}{1-(-3)}\,,$$

vilket förenklas till (Räkna själv!)

$$x - 4y = -7.$$

$\square$

I stället för att ange en riktningsvektor för linjen kan vi ange en *normalvektor* $\mathbf{n}$. En godtycklig punkt P ligger på linjen om $P - P_0$ och $\mathbf{n}$ är vinkelräta, dvs. $\mathbf{n} \cdot (P - P_0) = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{n} = (A,B)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ och $P = (x,y)$ ger detta $(A,B)\cdot(x - x_0, y - y_0) = Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$ eller

$$Ax + By = C\,,$$

där $C = Ax_0 + By_0$.

Exempel 6.1. (Fortsättning.) $\mathbf{v} = (4, 1)$ är en riktningsvektor för linjen. Så $\mathbf{n} = (-1, 4)$ är en normalvektor till linjen, som därför kan skrivas $-x + 4y = C$. Sätter vi in $P_0 = (-3, 1)$ får vi $C = 3 + 4 = 7$ så linjens ekvation är $-x + 4y = 7$ eller $x - 4y = -7$. □

Exempel 6.2. Var skär linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \end{cases}$$

varandra?
Lösning 1. Om (x, y) ligger på båda linjerna måste det finnas ett s och ett t så att $(x, y) = (1 + s, 2 + 2s)$ och $(x, y) = (-1 + t, t)$. Detta ger

$$\begin{cases} 1 + s = -1 + t \\ 2 + 2s = t \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} s - t = -2 \\ 2s - t = -2 \end{cases} .$$

Subtraherar vi den första ekvationen från den andra får vi det ekvivalenta ekvationssystemet

$$\begin{cases} s - t = -2 \\ s = 0 \end{cases} ,$$

som har lösningen $s = 0, t = 2$. Detta ger $x = 1, y = 2$ så linjernas skär varandra i punkten $(1, 2)$.
Lösning 2. Vi skriver linjerna på normalform. För den första linjen multiplicerar vi den första raden med -2 och lägger till den andra. Detta ger $-2x + y = 0$. För den andra linjen subtraherar vi den andra raden från den första och får $x - y = -1$. Så skärningspunkten (x, y) uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases} ,$$

som har lösningen (Räkna själv!) $(x, y) = (1, 2)$.

□

Övning 6.1. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkterna $(0, 3)$ och $(-1, 1)$.

Övning 6.2. Bestäm linjen genom punkterna $(1, 2)$ och $(-2, 3)$ på parameterform och parameterfri form. Hur långt från linjen ligger punkten $(3, -1)$.

Övning 6.3. Vad är ekvationen för den linje som går genom punkten $(2, 1)$ och är vinkelrät mot linjen $3x + y = 3$?

Övning 6.4. Var skär linjerna $3x + y = 3$ och $(x, y) = (2, 3) + t(2, -3)$ varandra?

Övning 6.5. Bestäm en linje som är vinkelrät mot vektorn $(3, 4)$ och vars avstånd till $(1, 0)$ är 5.

6.2. Räta linjen i rummet

Det finns två generaliseringar av räta linjen i planet till $\mathbb{R}^3$; linjer och plan. I detta avsnitt diskuterar vi räta linjen och i nästa planet.

Precis som i $\mathbb{R}^2$ bestäms en linje av en punkt P_0 på linjen och en riktningsvektor $\mathbf{v}$. Då kan punkterna P på linjen skrivas

$$P = P_0 + t\mathbf{v}\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Om $P = (x, y, z), P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $\mathbf{v} = (a, b, c)$ ger detta linjens ekvation på parameterform,

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}.$$

Om $a \neq 0, b \neq 0$ och $c \neq 0$, kan vi elliminera t ur ekvationssystemet och skriva

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}(= t)\,.$$

Exempel 6.3. Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(2, 3, 1)$

Lösning. Vektorn $\mathbf{v} = (2, 3, 1) - (1, 2, 3) = (1, 1, -2)$ är en riktningsvektor för linjen och vi har $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, -2)$ eller

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}.$$

$\square$

Exempel 6.4. Skär linjerna

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

varandra?

Lösning. Om (x, y, z) ligger på båda linjerna måste vi ha

$$\begin{cases} 1 + t = x = 1 + 2s \\ 2 + t = y = 3s \\ 3 + t = z = 3 - s \end{cases}.$$

Den första ekvationen ger $t = 2s$. Stoppar vi in detta i den andra får vi $2 + 2s = 3s$. Alltså måste $s = 2$ och $t = 4$. Men då ger den tredje ekvationen $7 = 1$, en motsägelse. Detta innebär att linjerna *inte* skär varandra. $\square$

Härnäst skall vi bestämma (det kortaste) avståndet från en punkt till en linje L. Detta är något svårare i $\mathbb{R}^3$ än i $\mathbb{R}^2$ (jämför Exempel 4.8) eftersom det inte bara finns en ortogonal riktning till linjen som i $\mathbb{R}^2$, utan ett plan av ortogonala riktningar. Vi nöjer oss därför med att i ett exempel beskriva en metod för att bestämma avståndet.

Exempel 6.5. Bestäm avståndet från punkten $P = (2, 2, 2)$ till linjen $x = 2y = 4z$.
Lösning. Vi börjar med att bestämma en riktningsvektor för linjen. Om vi sätter $z = t$ får vi

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = t \quad , \end{cases}$$

så $\mathbf{v} = (4, 2, 1)$ är en riktningsvektor för linjen. Det kortaste avståndet d är $d = |\overrightarrow{PQ}|$ där Q är den punkt på linjen sådan att $\mathbf{v}$ och $|\overrightarrow{PQ}|$ är vinkelräta. (Rita figur!) Eftersom Q ligger på linjen är $Q = (4t, 2t, t)$ för något t och $\overrightarrow{PQ} = (4t-2, 2t-2, t-2)$. Så $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0$ betyder $0 = (4t-2, 2t-2, t-2) \cdot (4, 2, 1) = 16t - 8 + 4t - 4 + t - 2 = 21t - 14$, dvs. $t = 14/21 = 2/3$. Så

$$\begin{aligned} d &= |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(\frac{8}{3} - 2, \frac{4}{3} - 2, \frac{2}{3} - 2\right)\right| \\ &= \left|\frac{2}{3}(1, -1, -2)\right| = \frac{2}{3}\sqrt{1+1+4} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1,63\,. \end{aligned}$$

□

Övning 6.6. Bestäm skärningspunkten för de två linjerna $L_1 : (x, y, z) = (1+t, -t, 4+2t)$ och $L_2 : (x, y, z) = (t, 1-t, 3t)$.

Övning 6.7. Välj ett värde på parametern a så att punkten $(a, 0, 2a)$ ligger på den räta linje som går genom $(3, 4, 0)$ och $(2, 2, 1)$.

Övning 6.8. En partikel rör sig rätlinjigt med konstant hastighet. Den startar i punkten $(1, 2, 3)$. Efter en halv minut befinner den sig i $(2, 2, 2)$. Var befinner den sig efter 10 minuter?

Övning 6.9. Finn det kortaste avståndet från origo till linjen $x - 2 = y - 3 = z - 4$.

Övning 6.10. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(1, 1, 1)$ till linjen $(x, y, z) = (2, -1, 3) + t(2, 0, 1)$.

Övning 6.11. Vilken punkt på linjen $(x, y, z) = t(2, -3, 1)$ ligger närmast punkten $(0, 1, 4)$?

Övning 6.12. Bestäm *spegelbilden* av punkten $(1, 1, 1)$ i linjen genom origo med riktningsvektor $(2, -3, 1)$. (Rita figur!)

Övning 6.13. Måste två ickeparallella linjer i (a) $\mathbb{R}^2$, (b) $\mathbb{R}^3$, skära varandra?

6.3. Plan

Ett plan i $\mathbb{R}^3$ bestämms av en punkt P_0 i planet och två ickeparallella vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Planet består av de punkter som uppfyller

$$P = P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

då s och t genomlöper de reella talen. $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ kallas *riktningsvektorer* för planet.

Om vi sätter $\mathbf{u} = (a, b, c), \mathbf{v} = (a', b', c'), P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $P = (x, y, z)$ får vi planets ekvation på *parameterform*,

$$\begin{cases} x = x_0 + sa + ta' \\ y = y_0 + sb + tb' \\ z = z_0 + sc + tc' \end{cases} .$$

På liknande sätt som för en linje i planet kan ett plan också bestämmas av en punkt P_0 och en normalvektor $\mathbf{n}$. Planet består av alla punkter P så att $\overrightarrow{P_0P}$ är vinkelrät mot $\mathbf{n}$,

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} .$$

Om $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ger detta $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$ eller

$$Ax + By + Cz = D$$

(där $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$). Detta kallas för planets ekvation på *normalform.*

Exempel 6.6. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna $P_0 = (1, 2, 3), P_1 = (3, 2, 1)$ och $P_2 = (4, 3, 2)$.

Lösning. Vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (2, 0, -2)$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (3, 1, -1)$ ligger båda i planet och är inte parallella (Verifiera det!). Planets ekvation i parameterform är därför

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + 3t \\ y = 2 + 0s + t \\ z = 3 - 2s - t \end{cases} .$$

Vi ser att detta ger

$$x - 2y + z = 0 ,$$

som är planets ekvation på normalform.

Vi ger också en direkt härledning av denna ekvation. Vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är vinkelrät mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och alltså en normalvektor till planet. Vi har

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2, -4, 2) .$$

Så $\mathbf{n} = 1/2\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1, -2, 1)$ är en normalvektor och planet kan skrivas $x - 2y + z = D$. Stoppar vi in $P_0 = (1, 2, 3)$ i denna ekvation får vi $D = 1 - 4 + 3 = 0$, och planets ekvation är

$$x - 2y + z = 0 \ .$$

□

Två ickeparallella linjer i planet skär varandra i en punkt. I rummet däremot behöver inte två ickeparallella skära varandra (men de kan göra det).

Två plan är *parallella* om de har samma riktningsvektorer. Det är ekvivalent med att deras normalvektorer är parallella. Två plan som inte är parallella skär varandra i en linje.

Exempel 6.7. Bestäm ekvationen för den linje som är skärningen mellan planen $x + 3y + 3z = 4$ och $2x + 7y + z = 1$.
Lösning. Punkterna (x, y, z) på linjen måste uppfylla båda dessa ekvationer,

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 7y + z = 1 \end{cases} .$$

För att lösa detta ekvationssystem multiplicerar vi den första ekvationen med -2 och lägger till den andra. Detta ger

$$\begin{cases} x + 3y + 3z & = & 4 \\ \qquad y - 5z & = & -7 \end{cases} .$$

Låter vi nu $z = t$, ger detta ekvationen (Räkna själv!)

$$\begin{cases} x = 25 - 18t \\ y = -7 + 5t \\ z = t \end{cases} .$$

□

Vi ser alltså att en linje i $\mathbb{R}^3$ antingen kan beskrivas i parameterform eller som ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre obekanta. Det första skrivsättet är bra när man skall bestämma avståndet från en punkt till en linje, det senare är mer praktiskt om man skall avgöra om en punkt ligger på linjen.

Exempel 6.8. Bestäm avståndet från punkten $P = (2,3,4)$ till planet $x + 2y + 3z = 0$.
Lösning. Planet har normalvektorn $\mathbf{n} = (1,2,3)$. Om Q är den punkt i planet där $\overrightarrow{PQ}$ är ortogonal mot planet så gäller $\overrightarrow{PQ}= t\mathbf{n}$ och $Q = P+t\mathbf{n}$ för något t. I koordinater betyder detta att $Q = (2,3,4)+t(1,2,3) = (2+t, 3+2t, 4+3t)$. Men Q ligger i planet och uppfyller därför planets ekvation så $2 + t + 2(3 + 2t) + 3(4 + 3t) = 0$. Detta ger (Räkna själv!) $t = -10/7$ och

$$d = |\overrightarrow{PQ}| = |t\mathbf{n}| = \frac{10}{7}\sqrt{1+4+9} = \frac{10}{7}\sqrt{14} \approx 5,35\,.$$

$\square$

Övning 6.14. Var skär linjen $L : (x,y,z) = (-3,4,3) + t(1,2,3)$ planet $\pi : (x,y,z) = (1,0,1) + t(2,1,0) + s(3,0,2)$?

Övning 6.15. Bestäm ekvationen för den räta linje som är snitt mellan planen $x+y+7z = 3$ och $-2x + 3y + z = -11$

Övning 6.16. Är linjen

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = z + 2$$

parallell med planet (a) $x + y + z = 10$, (b) $x - y + z = 10$?

Övning 6.17. Bestäm en normal till vart och ett av följande plan
(a) $x - y + z = 1$, (b) $x - y + z = 2$ och (c) $-y - z = 3$

Övning 6.18. Bestäm en punkt så att den, $(3,2,1)$, $(5,0,2)$ och $(1,-2,4)$
(a) inte ligger i samma plan, (b) ligger i samma plan.

Övning 6.19. En ljusstråle sänds iväg från punkten $(1,1,1)$ i riktningen $\mathbf{v} = (2,-1,-1)$. Var träffar denna ljusstråle planet $x + 2y - z = 10$?

Övning 6.20. Ett plan innehåller punkterna $(10,7,-12)$, $(17,35,-54)$ och är parallellt med vektorn $\mathbf{u} = (1,2,0)$. Bestäm planets ekvation dels i normalform, dels i parameterform.

Övning 6.21. Finn det kortaste avståndet från origo till planet $x + 2y + 3z = 4$.

Övning 6.22. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(1,-1,1)$ till planet $2x - y = 0$.

Övning 6.23. Vilken punkt i planet $2x - y + 2z = 0$ ligger närmast punkten $(2,-1,0)$?

Övning 6.24. Bestäm *spegelbilden* S av punkten $Q = (3,3,3)$ i planet $2x - y + 2z = 0$. (Rita figur!)

Övning 6.25. Bestäm ekvationen (i normalform) för det plan genom origo som är parallellt med linjerna $(x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,2)$ och $(x,y,z) = (3,2,1) + t(2,1,-2)$

Övning 6.26. Bestäm det kortaste avståndet från punkten $(3,1,2)$ till det plan som innehåller punkterna $(0,1,1)$, $(1,0,2)$ och $(1,1,0)$.

Övning 6.27. Bestäm avståndet mellan planen $x - 2y = z$ och $2x - 4y - 2z = 2$.

Övning 6.28. Bestäm den rätvinkliga projektionen av linjen $x - 1 = -2y = z + 1$ på planet $2x + y + z = 6$.

Övning 6.29. En ljusstråle med riktningen $(-1,-1,-1)$ reflekteras mot planet $x+2y+3z=0$. Vilken riktning har den reflekterade strålen?

Övning 6.30. Försök att generalisera avståndsformeln i Exempel 4.10 till avståndet från en punkt $P=(x,y,x)$ till planet $Ax+By+Cz=D$.

7. Matrismultiplikation och linjära avbildningar

I det här kapitlet skall vi definiera multiplikation av matriser. För att motivera definitionen och se vad den skall vara bra till börjar vi med några exempel.

Exempel 7.1. Skalärprodukt.
Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Skalärprodukten mellan dessa vektorer är (enligt Sats 4.2.)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Vi kan också skriva $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ som kolonnvektorer;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Multiplikationen mellan matriserna $\mathbf{x}$ och Y *definieras* genom

$$\mathbf{x}Y = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

□

Exempel 7.2. Linjära ekvationssystem.
Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases},$$

eller mer kortfattat

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Vi låter $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ vara ekvationsystemets koefficientmatris, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ dess högerled och $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektorn av obekanta. Vi definierar multiplikationen mellan matriserna A och X så att ekvationssystemet kan skrivas

$$AX = b\ ,$$

dvs. vi definierar AX genom

$$AX = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Observera att om $\mathbf{a_1} = (2, 3)$ och $\mathbf{a_2} = (3, -2)$ är första respektive andra raden i A så är

$$AX = \begin{pmatrix} \mathbf{a_1}X \\ \mathbf{a_2}X \end{pmatrix},$$

där $\mathbf{a_i}X$ beräknas som i Exempel 1. □

Låt oss för en liten stund glömma vektorer och betrakta reella tal. En formel som $f(x) = b$ kan uppfattas på minst två sätt; som en ekvation eller som en funktion. När vi betraktar formeln som en ekvation vill vi för ett givet b hitta de x som uppfyller likheten $f(x) = b$; betraktar vi den som en funktion vill vi för ett givet x beräkna funktionsvärdet $y = f(x)$. (Observera ändringen i beteckningar.) Ett enkelt men viktigt exempel på en funktion är $y = f(x) = ax$. Denna funktion är *linjär*, dvs. $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$, och en viktig del av analysen är att reducera studiet av allmänna funktioner till de linjära funktionerna.

I nästa exempel generaliserar vi detta till funktioner från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$.

Exempel 7.3. En linjär avbildning.
I Exempel 2 studerade vi ekvationssystemet $AX = b$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Matrisen A definierar en linjär funktion från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ genom att vektorn X avbildas på den vektor Y som ges av

$$Y = AX.$$

Att funktionen är linjär betyder att $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha AX_1 + \beta AX_2$. (Kontrollera detta.)

$\square$

Exempel 7.4. Befolkningsplanering
I en stad med en miljon innevånare bor detta år 400.000 i innerstaden och 600.000 i förorterna. Demografiska studier visar att av dessa flyttar fem procent från innerstaden ut till förorterna, och tre procent av de i förorterna flyttar in till centrum. Hur många är bosatta i innerstaden respektive förorterna nästa år? Om fem år? Om femtio år?
Lösning. Låt X_i vara befolkningen efter i år. (Så t.ex. är $X_0 = \begin{pmatrix} 400.000 \\ 600.000 \end{pmatrix}$ den ursprungliga befolkningsfördelningen.) Om $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$ så gäller $X_1 = AX_0$. (Varför då?) Utför vi matrismultiplikationen ser vi att

$$X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 0,95 \cdot 400.000 + 0,03 \cdot 600.000 \\ 0,05 \cdot 400.000 + 0,97 \cdot 600.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 398.000 \\ 602.000 \end{pmatrix}.$$

Så efter ett år bor 398.000 i centrum och 602.000 i förorterna.

Befolkningsfördelningen efter två år ges av

$$X_2 = AX_1 = A \begin{pmatrix} 0,95 \cdot 400.000 + 0,03 \cdot 600.000 \\ 0,05 \cdot 400.000 + 0,97 \cdot 600.000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,95(0,95 \cdot 400.000 + 0,03 \cdot 600.00) + 0,03(0,05 \cdot 400.000 + 0,97 \cdot 600.000) \\ 0.05(0,95 \cdot 400.000 + 0,03 \cdot 600.00) + 0,97(0,05 \cdot 400.000 + 0,97 \cdot 600.000) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,95 \cdot 0,95 + 0,03 \cdot 0,05 & 0,95 \cdot 0,03 + 0,03 \cdot 0,97 \\ 0,05 \cdot 0,95 + 0,05 \cdot 0,05 & 0,05 \cdot 0,03 + 0,97 \cdot 0,97 \end{pmatrix} X_0 \ .$$

Det är naturligt att definiera multiplikationen av A med sig själv så att

$$X_2 = AX_1 = A(AX_0) = (AA)X_0 = A^2 X_0 \ .$$

Därför sätter vi

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,95 \cdot 0,95 + 0,03 \cdot 0,05 & 0,95 \cdot 0,03 + 0,03 \cdot 0,97 \\ 0,05 \cdot 0,95 + 0,05 \cdot 0,05 & 0,05 \cdot 0,03 + 0,97 \cdot 0,97 \end{pmatrix} \ .$$

Observera att elementen i A^2 fås genom skalärprodukt mellan raderna och kolonnerna i A. Så t.ex. är elementet på plats $(1,2)$ (dvs. längst upp till höger) $\mathbf{a_1} A_2$ där $\mathbf{a_1}$ är första raden i A och A_2 är andra kolonnen. Utför vi (eller MATLAB) kalkylerna får vi $X_2 = \begin{pmatrix} 396.160 \\ 603.840 \end{pmatrix}$.

Vi kan upprepa detta resonomang och beräkna $X_3 = A^3 X_0, X_4 = A^4 X_0, \ldots$ Med hjälp av MATLAB ser vi att (Prova själv!)

$$X_5 = \begin{pmatrix} 391.477 \\ 608.523 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad X_{50} = \begin{pmatrix} 375.387 \\ 624.613 \end{pmatrix} \ .$$

□

Exempel 7.5. Betrakta två matriser $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. De definierar två linjära avbildningar $Y = AX$ och $Y = BX$. I det här exemplet skall vi beräkna matrisen för den sammansatta avbildningen $Z = A(BX)$. Vi har

$$Y = BX = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} \ .$$

Så

$$Z = AY = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}x_1 + a_{11}b_{12}x_2 + a_{12}b_{21}x_1 + a_{12}b_{22}x_2 \\ a_{21}b_{11}x_1 + a_{21}b_{12}x_2 + a_{22}b_{21}x_1 + a_{22}b_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{21}b_{12} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Så multiplikationen av matriserna A och B definieras som den 2×2-matris $C = (c_{ij})$ där

$$c_{ij} = \mathbf{a_i} B_j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}$$

Här är $\mathbf{a_i}$ den i:te raden i A och B_j den j:te kolonnen i B. □

Vi har nu tillräckligt med bakgrund för att diskutera det allmänna fallet.

Låt $A = (a_{ij})_{m \times k}$ och $B = (b_{ij})_{k \times n}$ vara en $m \times k$ respektive en $k \times n$ matris. Observera att antalet kolonner i A och antalet rader i B förutsätts vara lika. Matrismultiplikationen mellan A och B är den $m \times n$-matris $C = AB$ där $C = (c_{ij})_{m \times n}$ ges av

$$c_{ij} = \mathbf{a_i} B_j = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj} .$$

Här är som vanligt $\mathbf{a_i}$ den i:te raden i A och B_j den j:te kolonnen i B. Man kan visa att matrismultiplikation är associativ och distributiv. Däremot är den inte kommutativ; om t.ex. A är en 2×3 och B en 3×3 matris är AB definierad men inte BA. Ett annat exempel ges i Övning 2.

Låt

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} .$$

En $m \times n$ matris A definierar en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ genom

$$Y = AX .$$

Matrisen C för sammansättningen mellan två linjära avbildningar A och B är $C = AB$.

Övning 7.1. (a) Vad händer i Exempel 4 då åren går? (Dvs. undersök X_n då $n \to \infty$. Använd MATLAB.)
(b) Finns det någon stabil befolkningsfördelning? (Dvs. finns det någon vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ så att $AX = X$?)

Övning 7.2. Visa att om $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ så är $AB \neq BA$.

8. Minsta kvadratmetoden

Exempel 8.1. Antag att vi har fått i uppgift att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + \ \ x_2 = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 = 1 \end{cases} .$$

Om vi radreducerar detta system får vi (räkna själv)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Så ekvationssystemet saknar lösning. (Detta är typiskt för ett system med fler ekvationer än obekanta.) Använder vi däremot MATLABs kommando "$A\backslash b$" får vi svaret $x = y = 0,3636$. Detta är den så kallade *minstakvadratlösningen* till ekvationssystemet. Minstakvadratlösningen är den vektor X som minimerar $|AX - b|$. (För att se hur minstakvadratlösningen beräknas hänvisar vi till Lay: *Linear algebra* ..., §7.5.)

□

Exempel 8.2. Radioaktivt sönderfall
Ett visst mineral innehåller två radioaktiva ämnen med halveringstiderna $2\ln 2$ och $10/3 \ln 2$. Teoretisk betyder detta (Varför?) att radioaktiviteten vid tiden t uppfyller

$$y(t) = Ae^{-0,5t} + Be^{-0,3t},$$

där A och B är mängden av de radioaktiva ämnena. Med en Geigerräknare uppmättes radioaktiviteten efter 0, 1, 2, 3, 4 och 5 timmar till 1127, 778, 621, 452, 376 respektive 212. Hur mycket fanns det av de två ämnena?

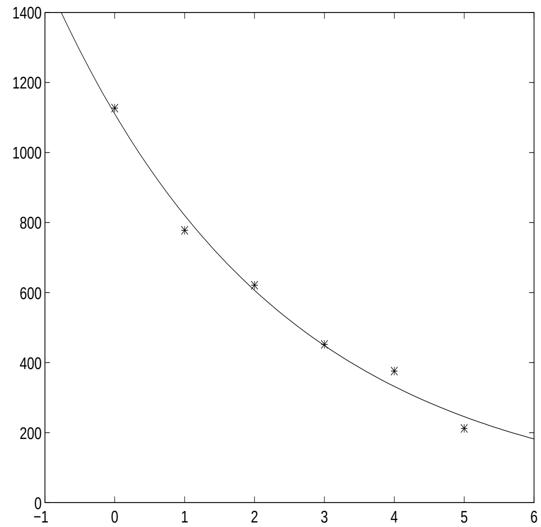
Lösning. Vi vill bestämma A och B så att kurvan $y = Ae^{-0,5t} + Be^{-0,3t}$ ansluter till våra data så bra som möjligt. Låt y_t vara den observerade radioaktiviteten efter t timmar. Vi vill bestämma minstakvadratlösningen till ekvationssystemet

$$Ae^{-0,5t} + Be^{-0,3t} = y_t \ , \ t = 0, 1, \ldots, 5,$$

eller utskrivet

$$\begin{cases} A + B = 1127 \\ Ae^{-0,5} + Be^{-0,3} = 778 \\ Ae^{-1} + Be^{-0,6} = 621 \\ Ae^{-1,5} + Be^{-0,9} = 452 \\ Ae^{-2} + Be^{-1,2} = 376 \\ Ae^{-2,5} + Be^{-1,5} = 212 \end{cases} .$$

MATLAB ger minstakvadratlösningen $A = 14,5$ och $B = 1096$. I figuren nedan visas de uppmätta värdena och kurvan med dessa parametervärden.

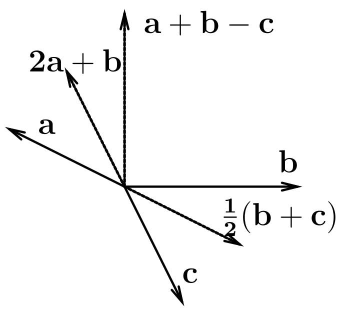


$\square$

9. Förslag till svar

Kapitel 2

1.



2. (a)&(b) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, (c) $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, (d) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, (e) $-\mathbf{e}_1$

3. (a) Med farten $\sqrt{40}$ m/s i riktning $341,6°$, (b) $19,5°$ 7. (b) 3

Kapitel 3

1. $(2,2)$ 2. $(1,1)$ 4. $(-1,3)$ 5. $(1,-1,2)$ 6. $(-8,7,-9)$
7. $a = -4$ 8. (a) 0 eller 2,, (b) 1, (c) 0 eller 3 9. $\mathbf{u} = \pm\frac{1}{3}(-1,2,2)$
10. (a) $\sqrt{14}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 3
11. (a) $6\sqrt{3}\,$N i riktningen $(1,1,1)$, (b) $8,70\,$N i $28,3^{\cdot}$ med avseende på ö-axeln
13. $(5,7)$ 14. $\overrightarrow{AB}= (2,3,4), BC = (-1,-14,-12), \overrightarrow{CA}= (-1,11,8)$
15. (a) $(2,1,1)$, (b) $1/2(x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ 16. $(5/2,3,7/2)$
17. $(2,1,2)$ 18. $\sqrt{2}$ i alla tre fallen 19. Sidorna är $2\sqrt{2}$.
20. $(3,-2)$, $(1,-4)$ eller $(-1,4)$ 21. Ja 22. $(1,5/2,7/2), (3/2,5/2,4), (3/2,3,9/2)$

Kapitel 4

1. Alla är ortogonala 2. (a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) $\arccos(5/7)$ 3. $128°$
4. T.ex. (a) $(3,2)$, (b) $(b,-a)$ och (c) $(0,1,2)$ 5. 0 och $1/5$,
6. Ja, vinkeln vid $(-1,4,2)$ är rät.
7. (a) 8 joule, (b) 0 joule, och (c) -3 joule 9. (a) 3 (b) $\sqrt{2}$ 11. $151°$
12. Nej 13. Ja 14. (a) $1/3\,\mathbf{b}$, (b) $3/4\,\mathbf{a}$ 15. De är vinkelräta
18. T.ex. $\mathbf{e}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{e}_2 = (2,-1,0)$ och $\mathbf{e}_3 = (3,6,-5)$.
$(1,1,1)$ har koordinaterna $(3/7, 1/5, 2/35)$

Kapitel 5

1. (a) 10 (b) 3   3. (a) $(1,-2,1)$ (b) $7(1,-1,-1)$ (c) $3(2,2,-1)$
4. $\sqrt{14}$ 8. 6   9. 1   10. (a) Ja, (b) Nej, (c) Nej

Kapitel 6

1. $-2x+y=3$ 2. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \end{cases}$; $x+3y=7$ respektive $7/\sqrt{10}$
3. $3y-x=1$ 4. $(-2,9)$ 5. $3x+4y=28$ eller $3x+4y=-22$ 6. $(2,-1,6)$
7. $a=1$ 8. $(21,2,-17)$ 9. $\sqrt{2}$ 10. $\sqrt{29}/\sqrt{5}$ 11. $(2,-3,1)/14$ 12. $(-1,-1,-1)$
13. (a) Ja, (b) Nej   14. $(-5,0,-3)$ 15. $(x,y,z)=(4,-1,0)+t(4,3,-1)$
16. (a) Nej (b) Ja   17. (a) $(1,-1,1)$, (b) $(1,-1,1)$, (c) $(0,-1,-1)$
18. (a) T.ex. origo (nästan vad som helst går) (b) T.ex. $(3,-4,5)$ 19. $(17,-7,-7)$
20. $6x-3y-z=51$ respektive $(x,y,z)=(10,7,-12)+t(1,2,0)+s(1,4,-6)$
21. $4/\sqrt{14}$ 22. $3/\sqrt{5}$ 23. $(8,-4,-10)/9$ 24. $(-1,5,-1)$
25. $4x-6y+z=0$ 26. $4/\sqrt{6}$ 27. $1/\sqrt{6}$ 28. $(3,-1,1)+t(2,-11,7)$
29. $(-1,5,11)$ 30. $|Ax+By+Cz-D|/|(A,B,C)|$

Kapitel 7

1. (a) Datorn antyder att $X_n \to X_\infty = \begin{pmatrix} 375.000 \\ 625.000 \end{pmatrix}$. (b) X_∞ är stabil.
2. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$