Föreläsningsanteckningar
i
distributionsteori

Hasse Carlsson

Version 2009

Inledning

Två viktiga metoder i analys är derivering och Fourertransformering. Tyvärr är inte alla funktioner deriverbara och Fouriertransformerbara. Distributionsteorins syfte är att lösa detta genom att bädda in funktionerna i en större klass av objekt, de så kallade distributionerna. Den grundläggande idén är att inte uppfatta en funktion som punktvis definierad utan som ett ”medelvärde”. En lokalt integrerbar funktion f identifieras med avbildningen

$$\varphi \mapsto \int f\varphi,$$

där φ tillhör ett rum av ”snälla” testfunktioner (t.ex. C_0^∞).

Vi generaliserar nu detta och låter en distribution vara en linjär funktional på rummet av testfunktioner. När vi skall utvidga operationer som derivering och Fouriertransformering till distributioner, gör vi det genom att föra över operationen på testfunktionerna, där de är väldefinierade.

Låt oss t.ex. se hur man definierar derivatan av en lokalt integrerbar funktion f på $\mathbb{R}$. Om f är kontinuerligt deriverbar, så ger partiell integration

$$\int f\varphi = -\int f\varphi'.$$

Vi använder nu denna formel för att *definiera* derivatan av f, då f saknar derivata i klassisk mening. f' är den avbildning som ges av

$$\varphi \mapsto -\int f\varphi'.$$

I dessa föreläsningar skall vi studera hur differentialkalkylen och Fourieranalysen kan utvidgas till distributioner, och studera olika tillämpningar, framförallt inom teorin för differentialekvationer. Framställningen är kortfattad och för ett mer djupgående studium rekomenderas följande böcker:

Laurent Schwartz. Théorie des Distributions I, II. Hermann, Paris, 1950–51.

Lars Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, 2nd ed. Springer, Berlin, 1990.

Innehåll

Kapitel 1

Något om C_0^∞-funktioner

När vi skall utvidga differentialkalkylen till distributioner, är det lämpligt att som testfunktioner välja oändligt deriverbara funktioner med kompakt stöd. I detta kapitel skall vi visa att det finns ”en massa” C_0^∞-funktioner.

Beteckningar

Låt Ω vara ett område i $\mathbb{R}^n$. $C^k(\Omega)$ är de k gånger kontinuerligt deriverbara funktionerna på Ω. (k kan vara $+\infty$.) $C_0^k(\Omega)$ är de funktioner i $C^k(\Omega)$ som har kompakt stöd. Vi betecknar punkter i $\mathbb{R}^n$ med $x = (x_1, \dots, x_n)$ och låter $dx = dx_1 \dots dx_n$ vara Lebesguemåttet. För en vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ sätter vi

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

och

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Exempel 1.1. Med dessa beteckningar kan Taylorpolynomet av grad N till f skrivas

$$\sum_{|\alpha| \le N} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha.$$

$\square$

Som beskrivits i inledningen, vill vi till $f \in L^1_{\text{lok}}$ associera avbildningen Λ_f, given av

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty.$$

Problem. Bestämmer $\Lambda_f\, f$?

Mer precist, om $f, g \in L^1_{\text{lok}}$ och

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g\varphi\, dx, \quad \varphi \in C_0^\infty,$$

är då $f = g$ n.ö.? $\square$

För att kunna lösa detta problem behöver vi konstruera lämpliga $\varphi \in C_0^\infty$. Vi börjar med

Exempel 1.2. Det finns funktioner $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ med $f(x) = 0$ om $x \leq 0$ och $f(x) > 0$ då $x > 0$.

Anmärkning 1.3. Det finns ingen sådan reellanalytisk funktion. $\square$

Bevis. En sådan funktion måste uppfylla $f^{(n)}(0) = 0$ för alla n. Så $f(x) = 0(x^n), x \to 0$, för alla n. Med ledning av detta sätter vi

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0\,. \end{cases}$$

Vi måste visa att $f \in C^\infty$. Med induktion ser man att

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

för något polynom P_n. Detta är klart för $x \neq 0$. Men i origo har vi för $h > 0$,

$$\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \frac{1}{h} P_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h}} \to 0, \quad h \to 0.$$

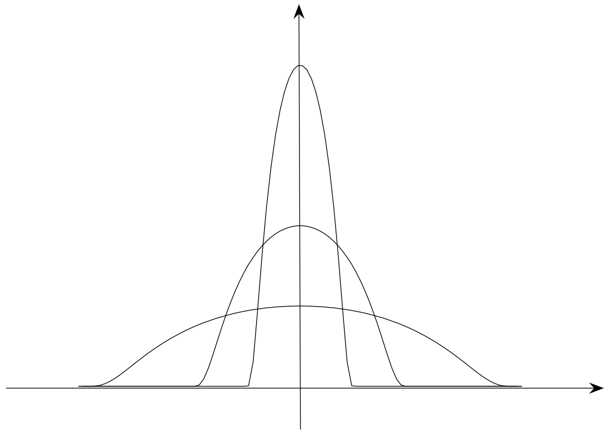
$\square$

Exempel 1.4. Det finns icke-triviala funktioner i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Bevis. Låt f vara som i Exempel 2 och sätt $\varphi(x) = f(1 - |x|^2)$. $\square$

Approximativa identiteter

Fixera en funktion $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ med $\int \varphi = 1$ och $\varphi \geq 0$. För $\delta > 0$ sätter vi $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi(x/\delta)$. Då är $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ och $\int \varphi_\delta = 1$. $\{\varphi_\delta; \delta > 0\}$ kallas en approximativ identitet.



"$\varphi_\delta \to \delta$"

Regularisering genom faltning

Faltningen av två funktioner f och φ definieras genom

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi(y)dy.$$

Faltningen är väldefinierad till exempel om $f \in L^1_{\text{lok}}$ och $\varphi \in C_0^\infty$. Då är $f * \varphi = \varphi * f, \quad f * \varphi \in C^\infty$ och $\partial^\alpha(f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$.

Övning 1.1. Verifiera detta.

Sats 1.5.

a) Om $f \in C_0$ så $f * \varphi_\delta \to f$, $\delta \to 0$, likformigt.

b) Om f är kontinuerlig i x, så $f * \varphi_\delta(x) \to f(x)$, $\delta \to 0$.

c) Om $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, så $f * \varphi_\delta \to f$ i L^p (och n.ö.).

Anmärkning 1.6. a) visar att $C_0^\infty(\Omega)$ är tätt i $C_0(\Omega)$ (i supremumnorm).

Övning 1.2. Verifiera detta.

Bevis.

a) Tag R så att stöd $\varphi \subset \{x; |x| \leq R\}$. Vi har

$$|f * \varphi_\delta(x) - f(x)| \leq \int_{|y| \leq \delta R} |f(x-y) - f(x)| \varphi_\delta(y) dy$$

$\leq$ likformig kontinuitet $\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(y) dy = \epsilon$, om δ är tillräckligt litet.

b) **Övning 1.3.**

c) Jensens olikhet ger

$$|f * \varphi_\delta(x) - f(x)|^p \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \varphi_\delta(y) dy \Big)^p$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_\delta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \delta t) - f(x)|^p \varphi(t) dt.$$

Med Fubinis sats och $f^{\delta t}(x) = f(x - \delta t)$, får vi

$$\|f * \varphi_\delta - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) dt \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - \delta t) - f(x)|^p dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \|f^{\delta t} - f\|_p^p \, \varphi(t) dt \to 0,$$

på grund av dominerad konvergens och att translation är kontinuerlig på L^p. Det sista påståendet följer av att C_0 är tätt i L^p, $1 \leq p < +\infty$:

Om $g \in C_0$ så är

$$\|g^\delta - g\|_p^p = \int_K |g(x - \delta) - g(x)|^p dx \to 0, \; \delta \to 0,$$

på grund av likformig konvergens. Approximera nu $f \in L^p$ med $g \in C_0$, $\|f - g\|_p < \epsilon$. Minkowskis olikhet (triangelolikheten) ger

$$\|f^\delta - f\|_p \leq \|f^\delta - g^\delta\|_p + \|g^\delta - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\epsilon + \|g^\delta - g\|_p \leq 3\epsilon,$$

om δ är nog litet. □

Övning 1.4. a) Låt $B_r = \{x; |x| < r\}$. Konstruera en funktion $\psi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ så att $0 \leq \psi_\delta \leq 1$, $\psi_\delta = 1$ på B_r och stöd $\psi_\delta \subset B_{r+\delta}$. Hur stor måste $\|\delta^\alpha \psi_\delta\|_\infty$ vara?

b) Låt $K \subset \Omega$ där K är kompakt och Ω öppen i $\mathbb{R}^n$. Konstruera $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ med $\psi = 1$ på en omgivning av K och $0 \leq \psi \leq 1$. Hur stor måste $\|\partial^\alpha \psi\|_\infty$ vara?

Vi kan nu svara ja på problemet på sid. 6.

Sats 1.7. *En lokalt integrerbar funktion som är 0 som distribution är 0 n.ö.*

Bevis. Vi antar alltså att $\int f\varphi = 0$ för alla $\varphi \in C_0^\infty$. Enligt Sats 1 a), följer $\int f\Phi = 0$ för alla $\Phi \in C_0$, och alltså är $f = 0$ n.ö. (t.ex. med hjälp av Riesz representationssats.)

Alternativt kan vi argumentera på följande sätt: Tag $\psi_n \in C_0^\infty$ med $\psi_n(x) = 1$ då $|x| \leq n$. Då är $f\psi_n \in L^1$ och

$$f\psi_n * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi_n(y)\varphi_\delta(x-y)dy = 0,$$

eftersom $y \mapsto \psi_n(y)\varphi_\delta(x-y)$ är C_0^∞. Men $f\psi_n * \varphi_\delta \to f\psi_n$ i L^1 enligt Sats 1 c). Så $f\psi_n = 0$ n.ö., och alltså är $f = 0$ n.ö. $\square$

Kapitel 2

Definition av distributioner

Definition 2.1. Låt Ω vara ett öppet område i $\mathbb{R}^n$. En *distribution* u på Ω är en linjär funktional på $C_0^\infty(\Omega)$, sådan att för varje kompakt mängd $K \subset \Omega$ finns konstanter C och k med

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty, \tag{2.1}$$

för alla $\varphi \in C_0^\infty$ med stöd $\varphi \subset K$. $\square$

Distributionerna på Ω betecknas $\mathscr{D}'(\Omega)$. Om samma k kan användas för alla K, säger vi att u har ordning $\leq k$. Dessa distributioner betecknas $\mathscr{D}'_k(\Omega)$. Det minsta k som kan användas kallas distributionens ordning. $\mathscr{D}'_F = \cup_k \mathscr{D}'_k$ är distributionerna av ändlig ordning.

Exempel 2.2.

(a) En funktion $f \in L^1_{\text{lok}}$ är en distribution av ordning 0.

(b) Ett mått är en distribution av ordning 0.

(c) $u(\varphi) = \partial^\alpha \varphi(x_0)$ definierar en distribution av ordning $|\alpha|$.

(d) Låt x_j vara en följd utan hopningspunkt i Ω och sätt

$$u(\varphi) = \sum \partial^{\alpha_j} \varphi(x_j).$$

Då är u en distribution. u har ändlig ordning om och endast om $\sup |\alpha_j| < \infty$ och då är ordningen $\sup |\alpha_j|$. $\square$

Vi kommer att använda beteckningen $\mathscr{D}(\Omega)$ för att beteckna mängden $C_0^\infty(\Omega)$, i synnerhet då vi förser $\mathscr{D}(\Omega)$ med en topologi som svarar mot följande konvergensbegrepp.

Definition 2.3. $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{D}(\Omega)$ om alla φ_j har stöd i någon fix kompakt mängd och $\|\partial^\alpha \varphi_j\|_\infty \to 0$, $j \to \infty$, för alla α. $\square$

Sats 2.4. *En linjär funktional u på $\mathscr{D}(\Omega)$ är en distribution omm $u(\varphi_j) \to 0$ då $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{D}(\Omega)$.*

Bevis. $\Rightarrow$): Trivialt.

$\Leftarrow$): Vi antar att (1) inte gäller, och skall visa att $u(\varphi_j) \not\to 0$, trots att $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{D}(\Omega)$. Att (1) inte gäller medför att det finns en kompakt mängd K och $\varphi_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ med stöd $\varphi_j \subset K$, $u(\varphi_j) = 1$ och

$$|u(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_\infty .$$

Detta ger $\|\partial^\alpha \varphi_j\|_\infty \leq \frac{1}{j}$ om $j \geq |\alpha|$. Så $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{D}(\Omega)$. $\square$

Sats 2.5. *En distribution $u \in \mathscr{D}'_k(\Omega)$ kan entydigt utvidgas till en linjär funktional på $C_0^k(\Omega)$ sådan att för varje kompakt mängd $K \subset \Omega$ finns en konstant C så att*

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty , \tag{2.2}$$

för alla $\varphi \in C_0^k(\Omega)$ med stöd i K.

Korollarium 2.6. *Mått och distributioner av ordning 0 sammanfaller.*

Bevis. Låt φ vara en fix funktion i $C_0^k(\Omega)$. Låt $\Phi_\delta \in C_0^\infty$ vara en approximativ identitet och sätt $\varphi_n = \varphi * \Phi_{\frac{1}{n}}$, $n \geq N$. Då har alla φ_n stöd i en fix kompakt mängd K i Ω och om $|\alpha| \leq k$ så är

$$\|\partial^\alpha(\varphi - \varphi_n)\|_\infty = \|\partial^\alpha \varphi - (\partial^\alpha \varphi) * \Phi_{\frac{1}{n}}\|_\infty \to 0,\ n \to \infty . \tag{2.3}$$

Så om u har en utvidgning som uppfyller (2) gäller $u(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n)$.

Detta bevisar entydigheten av utvidgningen och gör att det är naturligt att definiera

$$u(\varphi) = \lim_{n\to\infty} u(\varphi_n) .$$

Gränsvärdet existerar ty $u(\varphi_n)$ är en Cauchy följd:

$$|u(\varphi_n) - u(\varphi_m)| = |u(\varphi_n - \varphi_m)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi_m)\| \to 0,$$

då $n, m \to \infty$.

Det är lätt att genom gränsövergång i (1) se att u uppfyller (2). $\square$

Övning 2.1. Verifiera detta.

Sats 2.7. *En positiv distribution är ett positivt mått.*

Definition 2.8. En distribution u är *positiv* om $u(\varphi) \geq 0$ då $\varphi \geq 0$. □

Bevis. Enligt Korollarium 6 räcker det att visa att $u \in \mathscr{D}'_0$. Antag först att φ är reellvärd och låt $K \subset\subset \Omega$ och tag $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \chi \leq 1$ och $\chi = 1$ på K. Om stöd $\varphi \subset K$ så är $\chi\|\varphi\|_\infty \pm \varphi \geq 0$. Så $u(\chi\|\varphi\|_\infty \pm \varphi) \geq 0$, eller

$$|u(\varphi)| \leq u(\chi\|\varphi\|_\infty) = u(\chi)\|\varphi\|_\infty,$$

så (1) gäller med $k = 0$, $C = u(\chi)$.

Om $\varphi = f + ig$ är komplexvärd, får vi

$$|u(\varphi)| \leq |u(f)| + |u(g)| \leq u(\chi)(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) \leq 2u(\chi)\|\varphi\|_\infty.$$

□

Sats 2.9. *En distribution är bestämd av sitt lokala beteende.*

Mer precist: Antag att $\Omega = \cup\Omega_i$ och att $u_i \in \mathscr{D}'(\Omega_i)$. Vidare antar vi att $u_i = u_j$ på $\Omega_i \cap \Omega_j$, dvs om $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_i \cap \Omega_j)$ så är $u_i(\varphi) = u_j(\varphi)$. Då finns en entydig distribution u på Ω med $u = u_i$ på Ω_i.

För att bevisa detta behöver vi en C_0^∞-partition av enheten.

Proposition 2.10. *Låt $K \subset \cup_1^N \Omega_i$. Då finns $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ och $\Sigma\varphi_i = 1$ på K.*

Bevis av Sats 9. Antag att $u = u_i$ på Ω_i. Låt stöd $\varphi = K$ och φ_i vara en partition av enheten som ovan. Linjäriteten ger, eftersom $\varphi = \sum_i \varphi\varphi_i$,

$$u(\varphi) = \sum_i u(\varphi\varphi_i) = \sum_i u_i(\varphi\varphi_i) \tag{2.4}$$

Detta visar entydigheten.

För att visa existensen, behöver vi visa att (4) ger en väldefinierad distribution u. Men om $\tilde{\varphi}_k$ är en annan partition av enheten, så är $\tilde{\varphi}_k = \sum_i \varphi_i\tilde{\varphi}_k$ på K och alltså $\sum_k u_k(\varphi\tilde{\varphi}_k) = \sum_k \sum_i u_k(\varphi\tilde{\varphi}_k\varphi_i) = \sum_i \sum_k u_i(\varphi\tilde{\varphi}_k\varphi_i) = \sum_i u_i(\varphi\varphi_i)$, så (4) definerar u entydigt.

Det är enkelt att visa att u uppfyller (1), och satsen är bevisad. □

Övning 2.2. Gör det!

Bevis av Proposition 10. Vi skall visa följande
Påstående. Det finns öppna mängder V_i med $\overline{V}_i \subset \Omega_i$ och $K \subset \cup_1^N V_i$.

Givet detta tag $\tilde{\varphi}_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$, $0 \le \tilde{\varphi}_i \le 1$ med $\tilde{\varphi}_i = 1$ på $\overline{V}_i$. Då är $\Sigma\tilde{\varphi}_i > 0$ på en omgivning U av K. Tag χ med $\chi = 1$ på K och stöd $\chi \subset U$. Sätt

$$\varphi_i = \chi \frac{\tilde{\varphi}_i}{\Sigma\tilde{\varphi}_i}.$$

Det är klart att φ_i uppfyller villkoren i propositionen.

För att visa påståendet, så tag till $x \in K$ en omgivning V_x med $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset \Omega_j$ för något j. Då är $K \subset \bigcup V_x$. Kompakthet ger $K \subset \bigcup_1^N V_{x_k}$. Låt $V_i = \bigcup\limits_{V_{x_k} \subset \Omega_i} V_{x_k}$. □

Stödet till en distribution

Om $f \in C$ så är stöd $f = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$. Detta medför att $\int f\varphi = 0$ för alla $\varphi \in C_0^\infty$ vars stöd inte råkar stödet till f.

Definition 2.11. Om $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ är
stöd $u = \{x \in \Omega$; Det finns ingen omgivning till x med $u = 0$ i omgivningen.$\}$

Övning 2.3. stöd u är sluten.

Sats 2.12. *Om* stöd $u \cap$ stöd $\varphi = \emptyset$ *så är* $u(\varphi) = 0$.

Bevis. Följer direkt från Sats 9, eftersom $u = 0$ lokalt på $\Omega \setminus$ stöd u. □

En viktig skärpning av Sats 12 är följande sats och dess korollarium.

Sats 2.13. *Antag att* $u \in \mathscr{D}'_k(\Omega)$ *och* $\varphi \in C_0^k(\Omega)$ *med* $\partial^\alpha\varphi(x) = 0$ *om* $|\alpha| \le k$ *och* $x \in$ stöd u. *Då är* $u(\varphi) = 0$.

Korollarium 2.14. *Om* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *och* stöd $u = \{x_0\} \subset \Omega$ *så är* u *av formen*

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

Bevis av Sats 13. Låt $K =$ stöd $u \cap$ stöd φ. Om $K = \emptyset$ så följer påståendet från Sats 5. Men K kan vara icke-tom. Sätt då $K_\epsilon = \{x; d(x, K) < \epsilon\}$ och tag $\chi_\epsilon \in C_0^\infty(K_\epsilon)$ med $\chi_\epsilon = 1$ i en omgivning av K. Då gäller

$$u(\varphi) = u(\chi_\epsilon\varphi + (1 - \chi_\epsilon)\varphi) = u(\chi_\epsilon\varphi),$$

enligt Sats 5.

Om $k = 0$ ger detta

$$|u(\varphi)| \leq C\|\chi_\epsilon \varphi\|_\infty \to 0,\ \epsilon \to 0.$$

Om $k > 0$ får vi i stället

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha (\chi_\epsilon \varphi)\|_\infty \leq C \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \|\partial^\alpha \chi_\epsilon \partial^\beta \varphi\|_\infty.$$

Vi kan välja χ_ϵ så att $\|\partial^\alpha \chi_\epsilon\|_\infty \leq C\epsilon^{-|\alpha|}$. För att uppskatta $\|\partial^\beta \varphi\|_\infty$ skall vi Taylorutveckla φ kring $x \in K$. Låt $y \in K_\epsilon$ och tag $x \in K$ med $|x - y| \leq \epsilon$. Sätt

$$g(t) = \partial^\beta \varphi(x + t(y - x)),$$

och Taylorutveckla g kring $t = 0$ av ording $k - |\beta| - 1$. Vi får

$$|\partial^\beta \varphi(y)| = |g(1)| = \Big| \sum_{i \leq k-|\beta|-1} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} + R(y) \Big|.$$

Nu är $g^{(i)}(0) = 0$ och

$$|R(y)| \leq C \sup_{0 \leq s \leq 1} |\partial^{k-|\beta|} g(s)| \leq C\epsilon^{k-|\beta|} \sum_{|\beta|=k} \|\partial^\beta \varphi\|_{K_\epsilon}.$$

Detta ger

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq k} \epsilon^{k-|\alpha|-|\beta|} \sum_{|\beta|=k} \|\partial^\beta \varphi\|_{K_\epsilon} \to 0, \quad \epsilon \to 0.$$

□

Bevis av Korollariet. u har ändlig ordning k. Fixera $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ med $\chi = 1$ nära x_0 och sätt

$$\psi(x) = \varphi(x) - \chi(x) \sum_{|\alpha| \leq k} (x - x_0)^\alpha \frac{\partial^\alpha \varphi(x_0)}{\alpha!}.$$

Då är $\partial^\alpha \psi(x_0) = 0$ om $|\alpha| \leq k$. Så Sats 13 ger $u(\psi) = 0$ eller

$$u(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha \varphi(x_0) u\Big(\frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \chi(x)\Big) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0).$$

□

Övning 2.4. H 2.2

Övning 2.5. H 3.1.7.

Övning 2.6. Visa att $u(\varphi) = \sum_1^\infty n^\alpha(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(-\frac{1}{n}))$ är en distribution av ordning ≤ 1 om $\alpha < 0$. Visa att stöd $u = \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots\}$ men om K är en sluten mängd med

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{i=0}^{k} \sup_K |\partial^i \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

så är antingen $\alpha < -1$ eller så innehåller K en omgivning av origo. (Speciellt kan vi inte välja $K =$ stöd u.)

Övning 2.7. Antag att $u \in \mathscr{D}'_k(\mathbb{R})$ och stöd $u \subset I$ där I är ett kompakt intervall. Visa att

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_I |\partial^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

(Ledning. Sats 13.)

Övning 2.8. Finns det en linjär funktional u på C_0^∞ som inte är en distribution?

Kapitel 3

Operationer på distributioner

Distributionsderivatan

Om u är en kontinuerligt deriverbar funktion i $\mathbb{R}^n$, får vi med partiell integration,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_k u \cdot \varphi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \partial_k \varphi \, dx, \quad \varphi \in \mathscr{D},$$

eftersom φ har kompakt stöd. Vi gör därför följande

Definition 3.1. Om $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, definierar vi $\partial_k u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ genom

$$\partial_k u(\varphi) = -u(\partial_k \varphi).$$

Att detta definerar en distribution följer av att

$$|\partial_k u(\varphi)| = |u(\partial_k \varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha (\partial_k \varphi)\|_\infty \leq C \sum_{|\alpha| \leq k+1} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Om $u \in C^1$ sammanfaller distributionsderivatan med den klassiska derivatan.

Exempel 3.2. Definiera Heavisidefunktionen H genom

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Då är

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

Diracmåttet i $x_0 \in \mathbb{R}^n$ är det mått som ges av $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$. Så vi har visat att $H' = \delta_0$. Diracmåttets derivator ges av $\partial^\alpha \delta_{x_0}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_{x_0}(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(x_0)$. Med dessa beteckningar, kan enligt Korollarium 2.14 en distribution med stöd i x_0 skrivas

$$u = \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha \delta_{x_0}^{(\alpha)}.$$

En generalisering av Exempel 2 ges av

Proposition 3.3. *Låt u vara en funktion i $\Omega \subset \mathbb{R}$, som är kontinuerligt deriverbar för $x \neq x_0$. Antag att derivatan v är integrerbar nära x_0. Då är*

$$u' = v + (u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0))\delta_{x_0}.$$

Bevis. Vi visar först att gränsvärdena existerar. Låt $x_0 < x < y$. Då är

$$u(x) = u(y) - \int_x^y v(t)dt.$$

Eftersom v är integrerbar kan vi låta $x \downarrow x_0$. Vi får

$$u(x_0 + 0) = u(y) - \int_{x_0}^y v(t)dt.$$

På samma sätt ser vi att $u(x_0 - 0)$ existerar. Vi får nu

$$\begin{aligned} u'(\varphi) &= -u(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} -\int_{|x-x_0|>\epsilon} u(x)\varphi'(x)dx \\ &= \lim_{\epsilon \to 0}\Big\{ -\Big[u(x)\varphi(x)\Big]_{x_0+\epsilon}^{\infty} - \Big[u(x)\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{x_0-\epsilon} + \int_{|x-x_0|>\epsilon} v(x)\varphi(x)dx\Big\} \\ &= (u(x_0+0) - u(x_0-0))\varphi(x_0) + \int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

$\square$

Sats 3.4. *Låt u vara en distribution på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$. Om $u' = 0$ så är u konstant.*

Bevis. Att $u' = 0$ i distributionsmening betyder att $u'(\varphi) = 0$ eller $u(\varphi') = 0$ för alla $\varphi \in \mathscr{D}$.

För att beräkna $u(\phi)$, vill vi avgöra om $\phi = \psi'$ för något $\psi \in \mathscr{D}$. Detta är fallet precis då $\int \phi = 0$ och då är $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt$. Så om $\int \phi = 0$, är $u(\phi) = 0$. Vi skall återföra det allmänna fallet på detta specialfall. Fixera $\psi_0 \in \mathscr{D}$ med $\int \psi_0 = 1$. Sätt $\tilde{\phi} = \phi - \psi_0 \int \phi$. Då är $\int \tilde{\phi} = 0$ så $0 = u(\tilde{\phi}) = u(\phi) - u(\psi_0)\int \phi$ eller $u(\phi) = u(\psi_0)\int \phi$. Så u är konstanten $u(\psi_0)$. $\square$

Multiplikation med funktioner

$\mathscr{D}(\Omega)$ har en naturlig vektorrumsstruktur, vi kan addera två distributioner och multiplicera en distribution med en skalär. Vi vill också kunna multiplicera en distribution med en funktion f. Om u är lokalt integrerbar så är

$$fu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (fu)\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(f\varphi)\, dx = u(f\varphi)\ .$$

För att detta skall kunna användas för att definiera fu då u är en distribution, krävs att $f \in C^\infty$.

Definition 3.5. Om $f \in C^\infty$ definierar vi fu genom

$$fu(\varphi) = u(f\varphi).$$

Övning 3.1. Visa att $fu \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Anmärkning 3.6. Om u har ordning k räcker det att kräva $f \in C^k$. □

Proposition 3.7.
(a) $\partial_j\partial_k u = \partial_k\partial_j u$
(b) $\partial_k(fu) = (\partial_k f)u + f\partial_k u$.

Övning 3.2. Bevisa Proposition 7.

Anmärkning 3.8. Eftersom distributionsderivatorna är oberoende av derivationsordningen enligt (a), kan vi använda beteckningen $\partial^\alpha u$, $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha\varphi)$. □

Sats 3.9. *Om $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, och $u' + au = f$ där $f \in C$ och $a \in C^\infty$, så är $u \in C^1$ och ekvationen är uppfylld klassiskt.*

Bevis. Antag först att $a \equiv 0$. Låt F vara en (klassisk) primitiv funktion till f. Då är $F \in C^1$ så $(u - F)' = u' - F' = f - f = 0$ i distributionsmening. Sats 1 ger $u = F + C$, så $u \in C^1$ och $u' = F' = f$ klassiskt.

Om $a \not\equiv 0$ multiplicerar vi ekvationen med dess integrerande faktor. Låt A vara en primitiv funktion till a. Då är A och e^A funktioner i C^∞. Vidare är

$$(e^A u)' = e^A u' + e^A au = e^A(u' + au)$$

i distributionsmening. Så ekvationen är ekvivalent med

$$(e^A u)' = e^A f,$$

och vi kan använda fallet $a \equiv 0$. □

Övning 3.3. H 3.1.1

Övning 3.4. H 3.1.5

Övning 3.5. H 3.1.14

Övning 3.6. H 3.1.21

Övning 3.7. H 3.1.22.

Övning 3.8. Visa att om $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, med $u^{(m)} + a_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + a_0 u = f$, där $f \in C$ och $a_j \in C^\infty$, så är $u \in C^m$ och ekvationen är uppfylld klassiskt.

Kapitel 4

Ändliga delen av en funktion

I detta avsnitt skall vi utvidga Proposition 3.3 till fallet då derivatan inte är lokalt integrerbar.

Exempel 4.1. Vad är $\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x_+}})$?

Vi har

$$
\begin{aligned}
&\langle (\frac{1}{\sqrt{x_+}})', \varphi \rangle = -\langle \frac{1}{\sqrt{x_+}}, \varphi' \rangle = \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} - \int_\epsilon^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi'(x) dx = \lim_{\epsilon \to 0} \Big(- \Big[\frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(x) \Big]_\epsilon^\infty - \frac{1}{2} \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}} dx \Big) \\
&= -\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0} \Big(\int_\epsilon^\infty \frac{1}{x^{3/2}} \varphi(x) dx - \frac{2\varphi(0)}{\sqrt{\epsilon}} \Big)
\end{aligned}
$$

$\square$

Definition 4.2.

$$
\langle \mathrm{fp} \frac{1}{x_+^{3/2}}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{3/2}} dx - \frac{2\varphi(0)}{\sqrt{\epsilon}} \right\} .
$$

$\square$

Vi har alltså visat att

$$
\frac{d}{dx}(\frac{1}{\sqrt{x_+}}) = -\frac{1}{2} \mathrm{fp} \frac{1}{x_+^{3/2}}.
$$

En variant av definitionen som är enklare att komma ihåg är

$$
\langle \mathrm{fp} \frac{1}{x_+^{3/2}}, \varphi \rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}} dx.
$$

Exempel 4.3. Vi definierar $\text{fp}\dfrac{1}{|x|^{5/2}}$ genom

$$\langle \text{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{|x|^{5/2}} dx \ .$$

Ordningen för $\text{fp}\dfrac{1}{|x|^{5/2}}$ är 2. För att se detta delar vi upp integralen i två bitar,

$$\langle \text{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}, \varphi\rangle = \int_{|x|\le 1} + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{|x|^{5/2}} dx = \text{I+II}.$$

För att uppskatta den första integralen använder vi att

$$|\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)| \le \frac{1}{2} x^2 \|\varphi''\|_\infty$$

och får

$$\text{I} \le \frac{1}{2}\|\varphi''\|_\infty \int_{|x|\le 1} \frac{1}{|x|^{1/2}} dx \le C\|\varphi''\|_\infty \ .$$

För den andra integralen gäller

$$\text{II} \le \int_{|x|>1} \frac{2\|\varphi\|_\infty + |x|\|\varphi'\|_\infty}{|x|^{5/2}} dx \le C(\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_\infty)$$

och alltså är ordningen högst två.

För att se att ordningen inte kan vara mindre låt $\varphi \in C_0^\infty$, $0 \le \varphi \le 1$, $\text{stöd}\varphi \subset (0,3)$ och $\varphi = 1$ på $[1,2]$ och sätt $\varphi_\epsilon(x) = \varphi(x/\epsilon)$. Då gäller

$$|\langle \text{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}, \varphi_\epsilon\rangle| = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_\epsilon(x)}{x^{5/2}} dx \ge \int_\epsilon^{2\epsilon} \frac{1}{x^{5/2}} dx \ge c\frac{1}{\epsilon^{3/2}} \ .$$

Vidare är $\|\varphi_\epsilon\|_\infty + \|\varphi_\epsilon'\|_\infty \le C/\epsilon$. Så om ordningen var mindre än 2 skulle vi ha $c/\epsilon^{3/2} \le |\langle \text{fp}\dfrac{1}{|x|^{5/2}}, \varphi\rangle| \le C/\epsilon$, en omöjlighet.

Eftersom ordningen hos $\text{fp}\dfrac{1}{|x|^{5/2}}$ är 2 och $|x|^{5/2} \in C^2$ är $|x|^{5/2}\text{fp}\dfrac{1}{|x|^{5/2}}$ väldefinierat och

$$\begin{aligned}\langle |x|^{5/2}\text{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}, \varphi\rangle &= \langle \text{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}, |x|^{5/2}\varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{5/2}\varphi(x)}{|x|^{5/2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Här har vi använt att $|x|^{5/2}\varphi(x)$ och dess derivata är 0 i origo.

$\text{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}$ löser alltså divisionsproblemet $|x|^{5/2}u = 1$. □

Övning 4.1. Visa att $(\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^{3/2}})' = -\frac{3}{2}\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^{5/2}}$.

Exemplen ovan kan generaliseras till att definiera fp x_+^{-a}, fp $|x|^{-a}$ och (för vissa a) fp x^{-a} etc. om a *inte* är ett heltal, t.ex.

$$\langle \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^a}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - P(x)}{|x|^a} dx,$$

där P är Taylorpolynomet till φ i origo av ordning [a] - 1. Då gäller

$$(\mathrm{fp}\frac{1}{|x|^a})' = -a\,\mathrm{fp}\frac{\mathrm{sgn}\,x}{|x|^{a+1}} = a\left(\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^{a+1}} - \mathrm{fp}\frac{1}{x_-^{a+1}}\right)$$

och

$$|x|^a \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^a} = 1.$$

En annan viktig egenskap hos $\mathrm{fp}\frac{1}{|x|^a}, a \neq -1, -2, \ldots,$ är att den är homogen av grad $-a$. Detta förenklar beräkningen av dess Fourier transform.

Vad menas med att en distribution är homogen? För en funktion $u(x)$ på $\mathbb{R}^n$, säger vi att u är homogen av grad α om $u(tx) = t^\alpha u(x)$, $t > 0$. Detta kan omformuleras på ett sätt som har mening för distributioner. För en funktion u gäller

$$\langle u(tx), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(tx)\varphi(x)dx = [y = tx] = \int_{\mathbb{R}} u(y)\frac{1}{t^n}\varphi(\frac{y}{t})dy = \langle u, \varphi_t \rangle.$$

Men om u är homogen av grad α gäller också

$$\langle u(tx), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(tx)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} t^\alpha u(x)\varphi(x)dx = t^\alpha \langle u, \varphi \rangle.$$

Vi gör därför följande

Definition 4.4. $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ är *homogen av grad* α om

$$\langle u, \varphi_t \rangle = t^\alpha \langle u, \varphi \rangle, t > 0.$$

□

Då gäller

Proposition 4.5. $\mathrm{fp}\frac{1}{|x|^a}$ *och* $\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^a}$ *är homogena av grad* $-a$ *om* $a \neq 1, 2, 3, \ldots$

Bevis för $\mathrm{fp}\dfrac{1}{|x|^{5/2}}$. Vi har $\varphi_t(0) = \frac{1}{t}\varphi(0)$ och $\varphi_t'(0) = \frac{1}{t^2}\varphi'(0)$, så

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}, \varphi_t\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^{5/2}}\Big(\frac{1}{t}\varphi(\frac{x}{t}) - \frac{1}{t}\varphi(0) - \frac{x}{t^2}\varphi(0)\Big)dx \\
&= \Big[y = \frac{x}{t}\Big] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^{5/2}|x|^{5/2}}(\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0))dx = \frac{1}{t^{5/2}}\langle \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^{5/2}}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

□

Exempel 4.6. Beräkna $(\log|x|)'$.

$$\begin{aligned}
&\langle (\log|x|)', \varphi)\rangle = -\langle \log|x|, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\log|x|dx \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} \varphi'(x)\log|x|dx = \lim_{\epsilon\to 0} -\Big\{[\varphi(x)\log|x|]_{-\infty}^{-\epsilon} \\
&+ [\varphi(x)\log|x|]_{\epsilon}^{\infty} - \int_{|x|>\epsilon}\varphi(x)\frac{dx}{x}\Big\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big\{\int_{|x|>\epsilon}\varphi(x)\frac{dx}{x} + (\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon))\log\epsilon\Big\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\varphi(x)\frac{dx}{x} = \mathrm{pv}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}dx\ ,
\end{aligned}$$

där den sista likheten är en definition. □

Definition 4.7. $\langle \mathrm{pv}\dfrac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_{|x|>\epsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$

Om vi i stället deriverar $\log x_+$ får vi

$$\begin{aligned}
&\langle \log x_+, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} -\int_{\epsilon}^{\infty}\varphi'(x)\log x dx = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(-[\varphi(x)\log x]_{\epsilon}^{\infty} + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx\Big) = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx + \varphi(0)\log\epsilon\Big) = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx - \int_{\epsilon}^{1}\frac{\varphi(0)}{x}dx\Big) = \\
&= \int_0^{\infty}\frac{\varphi(x) - \chi(x)\varphi(0)}{x}dx,
\end{aligned}$$

där $\chi = \chi_{[-1,1]}$, liksom i resten av detta kapitel.

Så med följande

Definition 4.8. $\langle \mathrm{fp}\dfrac{1}{x_+}, \varphi\rangle = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \chi(x)\varphi(0)}{x} dx$ $\square$

har vi alltså visat att $(\log x_+)' = \mathrm{fp}\dfrac{1}{x_+}$.

Övning 4.2. Visa att $\mathrm{fp}\dfrac{1}{x_+}$ löser divisionsproblemet $xu = H$.

Exemplen ovan kan generaliseras till följande

Definition 4.9.

$$\langle \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^n}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - P(x) - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\chi(x)}{|x|^n} dx$$

om $n = 1, 2, 3, \ldots$ och P är Taylorpolynomet till φ av grad $n - 2$. $\square$

Exempel 4.10. $(\mathrm{fp}\dfrac{1}{x_+^2})' = -2\mathrm{fp}\dfrac{1}{x_+^3} + \dfrac{1}{2}\delta^{(2)}$. $\square$

Bevis.

$$\langle (\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^2})', \varphi\rangle = -\langle \mathrm{fp}\frac{1}{x_+^2}, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0) - x\varphi''(0)\chi(x)}{x^2} dx =$$
$$-\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x^2} dx - \int_\epsilon^1 \frac{x\varphi''(0)}{x^2} dx\right\}.$$

Eftersom $\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)$ är en primitiv funktion till $\varphi'(x) - \varphi'(0)$ ger partiell integration i den första integralen

$$\langle (\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^2})', \varphi\rangle = -\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\left[\frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2}\right]_\epsilon^\infty + \right.$$
$$\left. 2\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^3} dx - \int_\epsilon^1 \frac{x\varphi''(0)}{x^2} dx\right\}.$$

Nu gäller

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^2}\right]_\epsilon^\infty = -\frac{1}{2}\varphi''(0)$$

och

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{2\int_\epsilon^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)}{x^3} dx - \int_\epsilon^1 \frac{x\varphi''(0)}{x^2} dx\right\} =$$
$$2\int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \frac{1}{2}x^2\varphi''(0)\chi(x)}{x^3}\, dx\,.$$

Så

$$\langle(\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^2})',\varphi\rangle = \frac{1}{2}\varphi''(0) - 2\int_0^\infty \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\frac{1}{2}x^2\varphi''(0)\chi(x)}{x^3}\,dx$$
$$= \langle -2\mathrm{fp}\frac{1}{x_+^3} + \frac{1}{2}\delta^{(2)},\varphi\rangle.$$

□

Exempel 4.11. $\mathrm{fp}\frac{1}{|x|^3}$ är *inte* homogen av grad -3 ty

$$\langle \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^3},\varphi_t\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{t}\varphi(\frac{x}{t})-\frac{1}{t}\varphi(0)-\frac{x}{t^2}\varphi'(0)-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t^3}\varphi''(0)\chi(x)}{|x|^3}dx$$
$$= \left[y=\frac{x}{t}\right] = \frac{1}{t^3}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\frac{1}{2}x^2\varphi''(0)\chi(xt)}{|x|^3}dx$$
$$= (\text{Låt oss anta } t>1) = \frac{1}{t^3}\langle \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^3},\varphi\rangle + \frac{1}{2t^3}\varphi''(0)\int_{\frac{1}{t}<|x|<1}\frac{dx}{|x|}$$
$$= \frac{1}{t^3}\langle \mathrm{fp}\frac{1}{|x|^3},\varphi\rangle + \varphi''(0)\frac{\log t}{t^3}.$$

□

Övning 4.3. Vad händer om $t<1$?

Övning 4.4. Är $\mathrm{fp}\frac{1}{x^3}$ homogen av grad -3?

Övning 4.5. Visa att ekvationen $x^N u = 0$ har lösningen $u = \sum_{n=0}^{N-1} c_n\delta^{(n)}$.

Diskussionen i detta kapitel visar att ekvationen

$$x^N u = 1 \text{ har lösningen } u = \mathrm{fp}\frac{1}{x^N} + \sum_{n=0}^{N-1} c_n\delta^{(n)}\ .$$

På samma sätt har ekvationen

$$(x-a)^N u = 1 \text{ lösningen } u = \mathrm{fp}\frac{1}{(x-a)^N} + \sum_{n=0}^{N-1} c_n\delta_a^{(n)}\ .$$

där $\mathrm{fp}\frac{1}{(x-a)^N}$ definieras analogt med $\mathrm{fp}\frac{1}{x^N}$.

Vi kan nu lösa divisionsproblemet $Pu=1$, då P är ett polynom av en variabel. I en omgivning där $P\neq 0$ är förstås $u=1/P$ en snäll funktion.

Så problemet med divisionen är nära ett eventuellt reellt nollställe a till P. Men då kan vi skriva $P(x) = (x-a)^n Q(x)$ där $Q(a) \neq 0$. Så nära $x = a$ har vi $(x-a)^n Q(x) u = 1$ som har en lösning $Qu = \mathrm{fp}\dfrac{1}{(x-a)^n}$ och alltså är $u = \dfrac{1}{Q(x)}\mathrm{fp}\dfrac{1}{(x-a)^n}$ nära $x = a$. Enligt Sats 2.9 är u en väldefinierad distribution på $\mathbb{R}$ och u löser $Pu = 1$.

Övning 4.6. H 3.1.14

Övning 4.7. H 3.1.20

Övning 4.8. Låt u vara en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ som är homogen av grad $-n$. Visa att vi kan definiera en distribution $\mathrm{pv}\, u$ genom

$$\langle \mathrm{pv}\, u, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} u(x)\varphi(x)dx,$$

precis då $\int_{|x|=1} u(x)d\sigma(x) = 0$.

Övning 4.9. En alternativ metod att definiera $\mathrm{fp}\, x_+^\alpha$ är med analytisk fortsättning. För $\varphi \in \mathscr{D}$ och $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ är avbildningen

$$F_\varphi(\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha \varphi(x)dx$$

analytisk. Visa att denna avbildning kan fortsättas till en meromorf funktion i $\mathbb{C}$, vars enda singulariteter är enkla poler i $-1, -2, -3, \ldots$ Bestäm residuerna R_{-k} till F_φ och visa att om vi för $k = 1, 2, 3, \ldots$ utvidgar definitionen av F_φ genom

$$F_\varphi(-k) = \lim_{\alpha\to -k}\left(F_\varphi(\alpha) - \frac{R_{-k}}{\alpha+k}\right)$$

så gäller

$$F_\varphi(\alpha) = \langle \mathrm{fp}\, x_+^\alpha, \varphi\rangle.$$

Detta angreppssätt ger ett alternativ bevis för att

$$x_+^\alpha \mathrm{fp}\, x_+^{-\alpha} = H, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

och

$$(\mathrm{fp}\, x_+^\alpha)' = \alpha \mathrm{fp}\, x_+^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

Kapitel 5

Fundamentallösningar till Laplace och värmeledningsoperatorerna

Definition 5.1. Låt $P(D)$ vara en differentialoperator. En distribution E med $P(D)E = \delta$, kallas för en *fundamentallösning* till P.

$\square$

I Exempel 3.2 såg vi att Heavisidefunktionen H är en fundamentallösning till d/dx. Något allmännare är $H(x_1) \dots H(x_n)$ en fundamentallösning till $\partial_1 \dots \partial_n$. I det här kapitlet skall vi behandla Laplaceoperatorn

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

och värmeledningsoperatorn

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

För att kunna göra detta behöver vi integrera partiellt, och påminner därför om

Greens identitet.

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

där $\partial/\partial n$ är den utåtriktade normalderivatan.

Sats 5.1.
$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n=2, \\ -\dfrac{1}{\omega_n(n-2)|x|^{n-2}}, & n\geq 3, \end{cases}$$
är en fundamentallösning till Laplaceoperatorn i $\mathbb{R}^n$.

(ω_n är ytan av enhetssfären i $\mathbb{R}^n$.)

Övning 5.1. Beräkna ω_n i termer av Γ-funktionen,
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt.$$

Övning 5.2. Visa att $\Delta E(x) = 0$ om $x \neq 0$.

Bevis.
$$\begin{aligned} \langle \Delta E, \varphi\rangle = \langle E, \Delta\varphi\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon} E\Delta\varphi dx \\ \text{Övning 2} &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}(E\Delta\varphi - \varphi\Delta E)dx = \text{Greens identitet} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|=\epsilon}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\sigma = \lim_{\epsilon\to 0}(I_\epsilon + II_\epsilon). \end{aligned}$$

Vi behandlar bara fallet $n \geq 3$, och lämnar fallet $n=2$ som
Övning 5.3. Nu är
$$|I_\epsilon| \leq C\|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\|_\infty \frac{1}{\epsilon^{n-2}}\omega_n\epsilon^{n-1} \longrightarrow 0, \epsilon\to 0\ ,$$
och eftersom $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ gäller
$$\begin{aligned} II_\epsilon &= \int_{|x|=\epsilon}\varphi\frac{\partial E}{\partial r}d\sigma = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{|x|=\epsilon}\varphi(x)\frac{-(n-2)}{|x|^{n-1}}d\sigma(x) \\ &= \frac{\varphi(0)}{\omega_n}\int_{|x|=\epsilon}\frac{d\sigma(x)}{\epsilon^{n-1}} + \frac{1}{\omega_n}\int_{|x|=\epsilon}(\varphi(x)-\varphi(0))\frac{d\sigma(x)}{\epsilon^{n-1}} \\ &\longrightarrow \varphi(0), \epsilon\to 0. \end{aligned}$$

□

Sats 5.2.
$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp(-\dfrac{|x|^2}{4t}), & t>0, \\ 0, & t<0, \end{cases}$$
är en fundamentallösning till värmeledningsekvationen i $\mathbb{R}^{n+1}$.

Övning 5.4. $(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)E(t,x) = 0$ om $t \neq 0$.

Bevis. Låt $\phi(x) = E(x, \frac{1}{2})$. När $n = 1$ är detta tätheten för en stokastisk variabel som är $N(0,1)$-fördelad och i allmänhet produkten av n sådana tätheter. Dessutom gäller $E(x,t) = \phi_{\sqrt{2t}}(x)$ så $\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)dx = 1$ för alla $t > 0$ och $E \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Nu gäller

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial t}, \varphi \right\rangle = -\left\langle E, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} - \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{t>\epsilon} E \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$
$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t>\epsilon} \varphi \frac{\partial E}{\partial t} dxdt \right\},$$

och

$$\langle \Delta_x E, \varphi \rangle = \langle E, \Delta_x \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t>\epsilon} E \Delta_x \varphi dxdt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t>\epsilon} \Delta_x E \varphi dxdt$$

Så

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) E, \varphi \right\rangle =$$
$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon)dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t>\epsilon} \varphi \left(\frac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E \right) dxdt \right\} =$$
$$\text{Övning 4} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon)dx.$$

Eftersom $E(x,t) = \phi_{\sqrt{2t}}(x)$ är en approximativ identitet bör vi ha

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\epsilon)\varphi(x,\epsilon)dx \to \varphi(0),\ \epsilon \to 0.$$

Detta följer inte direkt av Sats 1.4 eftersom $\phi(x)$ inte har kompakt stöd och $\varphi(x,\epsilon)$ beror på ϵ. Men variabelbytet $x = \sqrt{2\epsilon}\, y$ ger

$$I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\varphi(\sqrt{2\epsilon}\, x, \epsilon)dx\ .$$

Nu gäller $\phi \in L^1$ och $|\varphi(\sqrt{2\epsilon}\, x, \epsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty$ så dominerad konvergens ger

$$\lim_{\epsilon \to 0} I_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \lim_{\epsilon \to 0} \varphi(\sqrt{2\epsilon}\, x, \epsilon)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\varphi(0,0)dx = \varphi(0)\ .$$

$\square$

Övning 5.5. Visa att $\dfrac{1}{\pi z}$ är en fundamentallösning till $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ i $\mathbb{C}$.

Övning 5.6. Bestäm $\dfrac{\partial}{\partial z} \log|z|$ och $\Delta \log|z|$ i $\mathbb{C}$.

Övning 5.7. H 3.3.9

Övning 5.8. H 3.3.11

Övning 5.9. H 3.3.12

Kapitel 6

Distributioner med kompakt stöd

Sats 6.1. *Antag att $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ har kompakt stöd. Då finns en entydig utvidgning av u till $C^\infty(\Omega)$ som uppfyller att $u(\varphi) = 0$ om* stöd u *och* stöd φ *är disjunkta.*

Om K är en kompakt mängd som innehåller en omgivning av stöd u, *så gäller*

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_K, \quad \varphi \in C^\infty(\Omega). \tag{6.1}$$

Bevis. Tag $\chi \in C_0^\infty(K)$ med $\chi = 1$ i en omgivning av stöd u. Om $\varphi \in C_0^\infty$ så gäller enligt Sats 2.12

$$u(\varphi) = u(\chi\varphi + (1-\chi)\varphi) = u(\chi\varphi) + u((1-\chi)\varphi) = u(\chi\varphi).$$

Så

$$u(\varphi) = u(\chi\varphi), \ \varphi \in C^\infty$$

definierar alltså en utvidgning av u. (1) följer med Leibnitz regel.

Antag omvänt att u_1 är någon utvidgning till C^∞. Villkoret på stödet ger att $u_1((1-\chi)\varphi) = 0$ och alltså är $u_1(\varphi) = u_1(\chi\varphi) = u(\chi\varphi)$ och utvidgningen är entydig.

□

Anmärkning 6.2. Övning 2.6 visar att man inte (alltid) kan ta $K =$ stöd u i (1). □

Övning 6.10. Formulera och bevisa en omvändning till Sats 1.

Vi kan alltså identifiera distributioner med kompakt stöd med de linjära funktionaler på $C^\infty(\Omega)$ som uppfyller (1). Dessa distributioner betecknas $\mathscr{E}'(\Omega)$.

Kapitel 7

Konvergens av distributioner

Definition 7.1. En följd $u_j \in \mathscr{D}'(\Omega)$ konvergerar mot $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ om

$$u_j(\varphi) \to u(\varphi), j \to \infty,$$

för varje testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Vi betecknar detta med $u_j \to u$ i $\mathscr{D}'$. □

Om $u_j \to u$ i $\mathscr{D}'$, så gäller också $\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u$ i $\mathscr{D}'$ för varje multiindex α. Vi skriver $u = \sum u_j$ i $\mathscr{D}'$ om partialsummorna konvergerar i $\mathscr{D}'$. Vi kan då derivera termvis, $\partial^\alpha(\sum u_j) = \sum \partial^\alpha u_j$.

Anmärkning 7.2. Konvergens i $\mathscr{D}'$ är ett "svagt" villkor, t.ex. gäller $f_j \to f$ i $\mathscr{D}'$ om $f_j \to f$ i L^p. □

Övning 7.1. Visa det.

Definition 7.3. $u_j \in \mathscr{D}'(\Omega)$ är en Cauchyföljd i $\mathscr{D}'(\Omega)$ om $u_j(\varphi)$ är en Cauchyföljd i $\mathbb{C}$ för varje $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Sats 7.4. *$\mathscr{D}'(\Omega)$ är fullständigt.*

Eftersom $u_j(\varphi)$ är en Cauchyföljd i $\mathbb{C}$ så existerar

$$u(\varphi) = \lim_{j\to\infty} u_j(\varphi),$$

och definierar en linjär funktional på $\mathscr{D}(\Omega)$. Svårigheten är att visa att u är en distribution, dvs. uppfyller normolikheten (2.1) eller den ekvivalenta formuleringen i Sats 2.4. Detta är en konsekvens av Banach-Steinhaus sats.

Låt K vara en kompakt mängd i Ω. Vi skall studera rummet $X = X_K = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \text{stöd}\, \varphi \subset K\}$. Vi inför en metrik på X genom

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_k 2^{-k} \frac{\|\varphi_1 - \varphi_2\|_k}{1 + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_k},$$

där $\|\varphi\|_k = \sum_{|\alpha|\le k} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$ och låter $\|\varphi\| = d(\varphi, 0)$.

Observera att om vi till $\epsilon > 0$ tar $N = N_\epsilon$ så att $\sum_{N+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$ så gäller

$$\|\varphi\| \le \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \|\varphi\|_k + \frac{\epsilon}{2} \le \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \|\varphi\|_N + \frac{\epsilon}{2} \le \|\varphi\|_N + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \ ,$$

om $\|\varphi\|_N < \frac{\epsilon}{2}$.

Övning 7.2. Visa att d är en metrik på X.

Övning 7.3. Visa att X är fullständigt.

Övning 7.4. Visa att $\varphi_j \to 0$ in $\mathscr{D}(K)$ om och endast om $\|\varphi_j\| \to 0$.

Övning 7.5. Visa att om $\|\varphi_j\| \to 0$ så finns positiva tal c_j med $c_j \to \infty$ och $\|c_j \varphi_j\| \to 0$.

Banach-Steinhaus sats.

Låt Λ_α vara en familj av linjära funktionaler på X med $|\Lambda_\alpha \varphi| \le C_\alpha \|\varphi\|$. Då gäller antingen

1) det finns $r > 0$ och $C < \infty$ med

$$\sup_\alpha |\Lambda_\alpha \varphi| \le C$$

för alla $\varphi \in X$ med $\|\varphi\| \le r$,

eller

2) $\sup_\alpha |\Lambda_\alpha \varphi| = \infty$ *för något $\varphi \in X$.*

Vi kan nu slutföra beviset för Sats 4. Tag φ med stöd i K. Eftersom $u_j(\varphi)$ konvergerar, kan inte 2) gälla. Alltså gäller 1), dvs.

$$|u(\varphi)| \le \sup_j |u_j(\varphi)| \le C \text{ om } \|\varphi\| \le r \ .$$

Så om $\varphi_k \to 0$ in $\mathscr{D}(K)$, $k \to \infty$, ger Övning 7.5 att $|u(c_k \varphi_k)| \le C$ om k är tillräckligt stort. Så $|u(\varphi_k)| \le \frac{C}{c_k} \to 0$, $k \to \infty$, dvs. $u \in \mathscr{D}'$.

$\square$

Banach-Steinhaus sats är en konsekvens av

Baires sats.

Antag att X är ett fullständigt metriskt rum. Låt $V_1, V_2, \dots$ vara öppna och täta mängder i X. Då är $\cap V_i$ icke-tomt.

Bevis. Låt $B_r(\phi) = \{\varphi \in X; d(\varphi, \phi) < r\}$. Eftersom V_i är öppna och täta kan vi succesivt välja ϕ_i och r_i med $r_i < \frac{1}{i}$ så att $\overline{B_{r_1}(\phi_1)} \subset V_1$ och $\overline{B_{r_i}(\phi_i)} \subset V_i \cap B_{r_{i-1}}(\phi_{i-1})$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Om $i, j \geq n$ så $\phi_i, \phi_j \in B_{r_n}(\phi_n)$ och alltså $d(\phi_1, \phi_j) < \frac{2}{n}$. Så ϕ_n är en Cauchyföljd, och alltså konvergerar $\phi_n \to \phi_0$ för något $\phi_0 \in X$. Men $\phi_i \in B_{r_n}(\phi_n)$ om $i \geq n$. Så $\phi_0 \in \overline{B_{r_n}(\phi_n)} \subset V_n$. Alltså $\phi_0 \in \cap V_i$. □

Bevis av Banach-Steinhaus sats. Låt $\phi(\varphi) = \sup |\Lambda_\alpha \varphi|$. ϕ är nedåt halvkontinuerlig, så $V_n = \{\varphi; \phi(\varphi) > n\}$ är öppen. Om något V_N inte är tätt, så finns φ_0, r med $B_r(\varphi_0) \subset V_N^c$ dvs.

$$\{\varphi; \|\varphi - \varphi_0\| < r\} \subset V_N^c\,.$$

Så om $\|\varphi\| < r$ är $|\Lambda_\alpha(\varphi_0 + \varphi)| \leq N$. Detta ger $|\Lambda_\alpha \varphi| \leq |\Lambda_\alpha(\varphi + \varphi_0)| + |\Lambda_\alpha \varphi_0| \leq 2N = C$ om $\|\varphi\| < r$.

Å andra sidan om alla V_n är täta, så finns $\varphi \in \cap V_n$, dvs. $\phi(\varphi) = \infty$ eller $\sup_\alpha |\Lambda_\alpha \varphi| = \infty$. □

Sats 7.5. *Antag att $u_j \to u_0$ i $\mathscr{D}'(\Omega)$ och $u_j \geq 0$. Då konvergerar u_j mot u_0 svagt som mått och $u_0 \geq 0$.*

Bevis. Eftersom u_0 är ett gränsvärde av positiva distributioner är u_0 en positiv distribution. Enligt Sats 2.7 är u_0 ett positivt mått. Om $\chi \in C_0^\infty$ är 1 på K, gav beviset för Sats 2.7 uppskattningen

$$|u_j(\varphi)| \leq 2u_j(\chi)\|\varphi\|_\infty,$$

då $\varphi \in C_0^\infty$ har stöd i K.

Eftersom $u_j(\chi) \to u_0(\chi)$ är $\sup_j |u_j(\chi)| \leq C$, och vi får

$$|u_j(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_\infty,\ \varphi \in C_0^\infty\,, j = 0, 1, 2, \dots$$

Genom gränsövergång, jämför Sats 2.5, gäller detta även då $\varphi \in C_0$.

Låt nu $\varphi \in C_0$. Det gäller att visa att $u_j(\varphi) \to u_0(\varphi)$, $j \to \infty$. Tag $\varphi_n \in C_0^\infty$ med $\varphi_n \to \varphi$ likformigt. Då gäller

$$\begin{aligned}|u_j(\varphi) - u_0(\varphi)| &\le |u_j(\varphi) - u_j(\varphi_n)| + |u_j(\varphi_n) - u_0(\varphi_n)| + |u_0(\varphi_n) - u_0(\varphi)| \\ &= |u_j(\varphi - \varphi_n)| + |u_j(\varphi_n) - u_0(\varphi_n)| + |u_0(\varphi_n - \varphi)| \\ &\le 2C\|\varphi - \varphi_n\| + |u_j(\varphi_n) - u_0(\varphi_n)| \,.\end{aligned}$$

och alltså

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} |u_j(\varphi) - u_0(\varphi)| \le 2C\|\varphi - \varphi_n\|_\infty < \epsilon$$

om n är tillräckligt stort.

$\square$

Övning 7.6. Antag att f är analytisk i $\Omega = I \times (0, \delta) \subset \mathbb{C}$, där I är ett öppet intervall. Visa att om $|f(z)| \le C|\mathrm{Imz}|^{-\mathrm{N}}$, så existerar $f(x + i0) = \lim_{y\to 0} f(x + iy)$ i distributionsmening och $f(x + i0) \in \mathscr{D}'_{N+1}(I)$.

Övning 7.7. Beräkna

a) $\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}$

och

b) $\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x+i0}$.

Övning 7.8. H 2.5

Övning 7.9. H 2.6

Övning 7.10. H 2.7

Övning 7.11. H 2.9

Övning 7.12. H 2.16

Kapitel 8

Faltning av distributioner

Om $u \in L^1_{\text{lok}}$ och $\varphi \in C_0^\infty$, så är $u*\varphi(x) = \int u(y)\varphi(x-y)dy$. Detta motiverar följande

Definition 8.1. Om $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ och $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, så är

$$u * \varphi(x) = \langle u_y, \varphi(x-y) \rangle.$$

$\square$

Med beteckningen $\langle u_y, \varphi(x-y)\rangle$ menas att distributionen u skall verka på testfunktionen $y \mapsto \varphi(x-y)$. Ibland skriver vi $\langle u, \varphi(x-\cdot)\rangle$ för samma sak.

Anmärkning 8.2. Denna definition kan också användas i fallet $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Sats 8.1. *Om $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ och $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, så gäller*
a) $u * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
b) $\text{stöd}(u * \varphi) \subset \text{stöd}\, u + \text{stöd}\, \varphi$
c) $\partial^\alpha(u * \varphi) = u * \partial^\alpha \varphi = (\partial^\alpha u) * \varphi$

Bevis. Vi visar först att $u*\varphi$ är kontinuerlig. Så låt $x \to x_0$. Om $|x-x_0| \le 1$, så har $y \mapsto \varphi(x-y)$ stöd i en fix kompakt mängd. Dessutom gäller $\partial_y^\alpha(\varphi(x-y) - \varphi(x_0-y)) \to 0$, $x \to x_0$, likformigt. Så $\varphi(x-y) \to \varphi(x_0-y)$, i $\mathscr{D}$ när $x \to x_0$, och alltså $u * \varphi(x) = \langle u_y, \varphi(x-y)\rangle \to \langle u_y, \varphi(x_0-y)\rangle = u * \varphi(x_0), x \to x_0$.

För b), räcker det på grund av kontinuiten att visa att om $x \notin \text{stöd}\, u + \text{stöd}\, \varphi$, så är $u*\varphi(x) = 0$. Men om $x \notin \text{stöd}\, u + \text{stöd}\, \varphi$, så finns inget $y \in \text{stöd}\, u$ med $x - y \in \text{stöd}\, \varphi$. Det finns alltså inget $y \in \text{stöd}\, u$ och $y \in \text{stöd}\, \varphi(x-\cdot)$. Alltså är $\text{stöd}\, u \cap \text{stöd}\, \varphi(x-\cdot) = \emptyset$ och $u * \varphi(x) = 0$.

Beviset för den andra likheten i c) är enkelt.

$$\partial^\alpha u * \varphi(x) = \langle \partial^\alpha u_y, \varphi(x-y)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u_y, \partial_y^\alpha \varphi(x-y)\rangle =$$
$$= \langle u_y, \varphi^{(\alpha)}(x-y)\rangle = u * (\partial^\alpha \varphi)(x).$$

Den första likheten följer med induktion om vi kan visa den i specialfallet $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$. Vi skall alltså visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u * \varphi(x + he_1) - u * \varphi(x)) = u * \partial_1 \varphi(x).$$

Låt $\phi_{x,h}(y) = \frac{1}{h}(\varphi(x + he_1 - y) - \varphi(x-y))$. Då är $\frac{1}{h}(u * \varphi(x + he_1) - u * \varphi(x)) = u(\phi_{x,h})$. Men $\phi_{x,h}(y) \to \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x-y)$ i $\mathscr{D}$. Alltså gäller $\partial^\alpha(u * \varphi)(x) = \lim_{h\to 0} u(\phi_{x,h}) = u_y(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x-y)) = u * \partial_1\varphi(x)$.

Eftersom a) följer från c) är satsen bevisad. □

Övning 8.1. Visa att $\phi_{x,h}(y) \to \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x-y)$ i $\mathscr{D}$.

Övning 8.2. Visa att faltningen av funktioner är associativ.

Sats 8.2. *Om $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ och $\varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, så är $(u * \varphi) * \psi = u * (\varphi * \psi)$.*

Anmärkning 8.3. Om $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, räcker det att en av φ, ψ har kompakt stöd. □

Bevis. Vi har

$$u * (\varphi * \psi)(x) = \langle u_y, \varphi * \psi(x-y)\rangle = \langle u_y, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y-t)\psi(t)dt\rangle \stackrel{?}{=}$$
$$\stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \langle u_y, \varphi(x-y-t)\rangle\psi(t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} u * \varphi(x-t)\psi(t)dt$$
$$= (u * \varphi) * \psi(x).$$

För att se att $\stackrel{?}{=}$ gäller, approximerar vi integralen med en Riemannsumma. Enligt Lemma 4 nedan konvergerar Riemannsumman mot faltningen i $\mathscr{D}$ och alltså gäller $\stackrel{?}{=}$. □

Lemma 8.4. *Om $\varphi \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$ och $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ så*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x-kh)\psi(kh)h^n \longrightarrow \varphi * \psi(x) \ \ i\ C_0^j,$$

då $h \to 0$.

Bevis av Lemma 4. Summan har stöd i stöd $\varphi+$stöd ψ. Funktionen $(x,y)\mapsto \varphi(x-y)\psi(y)$ är likformigt kontinuerlig. Så Riemannsumman konvergerar likformigt mot $\varphi*\psi(x)$. Eftersom $\partial^\alpha(\varphi*\psi)=\partial^\alpha\varphi*\psi$ om $|\alpha|\le j$, gäller detta även för derivatorna. $\square$

Sats 8.5 (Regularisering av distributioner.)**.** *Låt $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ och φ_δ vara en approximativ identitet. Då gäller $u*\varphi_\delta\to u$ i $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n), \delta\to 0$.*

Bevis. Definiera $\overset{\vee}{\psi}$ genom $\overset{\vee}{\psi}(x)=\psi(-x)$. Då är $u(\psi)=u*\overset{\vee}{\psi}(0)$. Så enligt Sats 2

$$\begin{aligned} u_\delta(\psi)=u*\varphi_\delta(\psi)=(u*\varphi_\delta)*\overset{\vee}{\psi}(0)=\\ =u*(\varphi_\delta*\overset{\vee}{\psi})(0)\ . \end{aligned}$$

Men eftersom φ_δ är en approximativ identitet, så gäller $\varphi_\delta*\overset{\vee}{\psi}\to\overset{\vee}{\psi}$ i $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\delta\to 0$. Vi får

$$\lim_{\delta\to 0}u_\delta(\psi)=\lim_{\delta\to 0}u*(\varphi_\delta*\overset{\vee}{\psi})(0)=u*\overset{\vee}{\psi}(0)=u(\psi).$$

$\square$

Övning 8.3. Låt $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Visa att det finns C_0^∞-funktioner u_n med $u_n\to u$ i $\mathscr{D}'(\Omega)$, $n\to\infty$.

Exempel 8.6. Ett alternativt bevis för att u är konstant om $u'=0$.

Låt $u_\delta=u*\varphi_\delta\in C^\infty$. Då är $u_\delta'=u'*\varphi_\delta=0*\varphi_\delta=0$. Så $u_\delta=C_\delta$. Men $u_\delta\to u$ i $\mathscr{D}'$, så $C_\delta\to C$ för någon konstant C och $u=C$. $\square$

Övning 8.4. Låt $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Visa

a) Om $u'\ge 0$, så är u en växande funktion.

b) Om $u''\ge 0$, så är u en konvex funktion.

Exempel 8.7. Harmoniska funktioner.

Om $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$ uppfyller $\Delta u=0$, säger vi att u är en harmonisk funktion. Harmoniska funktioner uppfyller medelvärdesegenskapen,

$$u(x)=\frac{1}{|S_r(x)|}\int_{S_r(x)}u(y)d\sigma(y).$$

I $\mathbb{R}^2$ följer detta av Cauchys integralformel eftersom en harmonisk funktion lokalt är realdelen av en holomorf funktion. Det allmänna fallet följer av

Övning 8.5. Bevisa medelvärdesegenskapen.

Ledning. Vi kan anta att $x=0$. Applicera först Greens identitet på funktionerna u och 1 på $B_r=\{|x|\le r\}$ och sedan på u och E (E är fundamentallösningen till Δ) på $\Omega_\epsilon=\{\epsilon\le|x|\le 1\}$. Låt $\epsilon\to 0$.

Ett annat bevis ges i Avsnitt 17.2.

Sats 8.8 (Weyls lemma). *Om $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ och $\Delta u = 0$, så är $u \in C^\infty$ och $\Delta u = 0$ klassiskt.*

Bevis. Låt φ_δ vara en approximativ identitet, $\varphi(x) = \varphi(|x|)$, $\varphi \geq 0$ och $\int \varphi = 1$. Sätt $u_\delta = u * \varphi_\delta$. Då är $u_\delta \in C^\infty$ och $\Delta u_\delta = (\Delta u) * \varphi_\delta = 0 * \varphi_\delta = 0$. Så u_δ uppfyller medelvärdesegenskapen. Därför är

$$\begin{aligned} u_\delta * \varphi(x) &= \int_0^\infty r^{n-1} \varphi(r) dr \int_{S^{n-1}} u_\delta(x - r\omega) d\sigma(\omega) \\ &= \omega_n u_\delta(x) \int_0^\infty r^{n-1} \varphi(r) dr = u_\delta(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) dy = u_\delta(x). \end{aligned}$$

Så $u_\delta = u_\delta * \varphi$. Låt nu $\delta \to 0$. Vi får $u = u * \varphi \in C^\infty$ och $\Delta u = \Delta u * \varphi = 0 * \varphi = 0$. □

Vi skall nu definiera faltningen av två distributioner. Vi vill göra det så att associativiteten bevaras. För att det skall gå bra, antar vi att åtminstone en av distributionerna har kompakt stöd.

Definition 8.9. Antag att $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, och minst en har kompakt stöd. Då är $u * v$ den (entydigt bestämda) distribution, som uppfyller

$$(u * v) * \varphi = u * (v * \varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

□

Är detta en definition?

Vi observerar först att $u * (v * \varphi)$ är väldefinierat. Om v har kompakt stöd så $v * \varphi \in \mathscr{D}$ och $u * (v * \varphi)$ är definierat enligt Definition 1.1. Annars har u kompakt stöd och $v * \varphi \in C^\infty$ så $u * (v * \varphi)$ är definierat enligt Anmärkning 1.2.

Att det finns högst en distribution $U = u * v$ är också klart. För om det fanns två sådana distributioner U och $\widetilde{U}$ så gäller $U * \varphi = u * (v * \varphi) = \widetilde{U} * \varphi$ och alltså $U(\varphi) = U * \overset{\vee}{\varphi}(0) = \widetilde{U} * \overset{\vee}{\varphi}(0) = \widetilde{U}(\varphi)$.

För att visa existensen, skall vi studera avbildningen $\varphi \mapsto u * \varphi$.

Proposition 8.10. *Låt $T\varphi = u * \varphi$. Då gäller*

a) Om $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, så är T en kontinuerlig linjär avbildning $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Om $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, så är T en kontinuerlig linjär avbildning $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ och $C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Bevis. Vi bevisar a) och lämnar b) som övning. Vi antar alltså att $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ och skall visa att $\partial^\alpha(u * \varphi_j) \to 0$ likformigt på kompakter. Eftersom $\partial^\alpha \varphi_j \to 0$ i $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ då φ_j gör det, och $\partial^\alpha(u * \varphi_j) = u * \partial^\alpha \varphi_j$, kan vi anta att $\alpha = 0$. När x ligger i en kompakt mängd och alla φ_j har stöd i en fix kompakt mängd så har har $y \mapsto \varphi_j(x-y)$ också stöd i en fix kompakt mängd. Så

$$|u * \varphi_j(x)| = |u(\varphi_j(x - \cdot)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi_j(x - \cdot)\|_\infty \longrightarrow 0,\ j \to \infty.$$

□

Övning 8.6. Bevisa Proposition 10 b).

Låt τ_h vara translationsoperatorn, $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x-h)$. Då gäller

Proposition 8.11. *Faltning och translation kommuterar.*

Bevis.

$$\begin{aligned} &u * \tau_h \varphi(x) = \langle u_y, \tau_h \varphi(x-y) \rangle = \langle u_y, \varphi(x-h-y) \rangle \\ &= u * \varphi(x-h) = \tau_h(u * \varphi)(x). \end{aligned}$$

□

En viktig omvändning av detta är

Sats 8.12. *Antag att T är en kontinuerlig linjär avbildning av $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ in i $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ som kommuterar med translationer. Då finns en distribution $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ med*

$$T\varphi = u * \varphi, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Bevis. Om $T\varphi = u * \varphi$, så är speciellt $u(\varphi) = u * \overset{\vee}{\varphi}(0) = T\overset{\vee}{\varphi}(0)$ Definiera därför u genom

$$u(\varphi) = T\overset{\vee}{\varphi}(0).$$

Kontinuitetsantagandet medför att u är en distribution. Vidare är

$$\begin{aligned} &u * \varphi(h) = \langle u, \varphi(h-x) \rangle = \langle u, \tau_h \overset{\vee}{\varphi} \rangle = T((\tau_h \overset{\vee}{\varphi})^\vee)(0) \\ &= T(\tau_{-h}\varphi)(0) = \tau_{-h} T(\varphi)(0) = T\varphi(h)\ . \end{aligned}$$

□

Vi ser nu att Definition 9 är en definition. Proposition 10 visar att $\varphi \mapsto u * (v * \varphi)$, uppfyller villkoren i Sats 12, och $u * v$ är denna distribution. □

Anmärkning 8.13. a) Om $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, så överensstämmer Definition 1 och 2.

b) Om både u och v har kompakt stöd så gäller $(u * v) * \varphi = u * (v * \varphi)$ för alla $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

□

Exempel 8.14. $u * \delta = u$ eftersom $(u * \delta) * \varphi = u * (\delta * \varphi) = u * \varphi$. □

Sats 8.15.

a) $u * v = v * u$

b) $\textit{stöd}\,(u * v) \subset \textit{stöd}\,u + \textit{stöd}\,v$

c) $u * (v * w) = (u * v) * w$, *om två av distributionerna har kompakt stöd.*

Bevis. a) För att visa att två distributioner U och V är lika, räcker det att visa att $U * (\varphi * \psi) = V * (\varphi * \psi), \varphi, \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Ty då är $(U * \varphi) * \psi = U * (\varphi * \psi) = V * (\varphi * \psi) = (V * \varphi) * \psi$, enligt Sats 2. Detta ger $U * \varphi = V * \varphi$, och $U = V$.

Nu är

$$(u * v) * (\varphi * \psi) = u * (v * (\varphi * \psi)) = u * ((v * \varphi) * \psi)$$
$$= u * (\psi * (v * \varphi)) = (u * \psi) * (v * \varphi).$$

Om v har kompakt stöd så följer den sista likheten av Sats 8.2. Om v inte har kompakt stöd följer den av nästa övning.

Vi har också

$$(v * u) * (\varphi * \psi) = (v * u) * (\psi * \varphi) = (v * \varphi) * (u * \psi) = (u * \psi) * (v * \varphi),$$

och a) följer.

b) På grund av kommutativiteten kan vi anta att v har kompakt stöd. Definiera $\check{v}$ genom $\langle \check{v}, \varphi \rangle = \langle v, \check{\varphi} \rangle$. Om $x \in \text{stöd}\,(u * v)$, finns till varje $\epsilon > 0$ ett $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\text{stöd}\,\varphi \subset \{y; |x - y| < \epsilon\} = O_\epsilon$, med $0 \neq u * v(\varphi) = u * v * \check{\varphi}\,(0)$ $= u((v * \check{\varphi})^\vee) = u(\check{v} * \varphi)$. Så $E = \text{stöd}\,u \cap \text{stöd}\,(\check{v} * \varphi) \neq \emptyset$. Låt $y \in E$. Då gäller $y \in \text{stöd}\,u$ och $y \in \text{stöd}\,\check{v} * \varphi$, eller $y = -z + x + \delta$, där $z \in \text{stöd}\,v$ och $|\delta| < \epsilon$. Så $x = y + z - \delta \in \text{stöd}\,u + \text{stöd}\,v + O_\epsilon$. Låt nu $\epsilon \to 0$.

c) Antag först att w har kompakt stöd. Då är $w * \varphi \in \mathscr{D}$, och vi får

$$((u * v) * w) * \varphi = (u * v) * (w * \varphi) = u * (v * (w * \varphi)).$$

Men vi har också

$$(u * (v * w)) * \varphi = u * ((v * w) * \varphi) = u * (v * (w * \varphi))$$

och alltså är $u * (v * w) = (u * v) * w$.

Om inte w har kompakt stöd, har både u och v det, och a) ger

$$\begin{aligned} u * (v * w) &= (v * w) * u = v * (w * u) = (w * u) * v \\ &= w * (u * v) = (u * v) * w. \end{aligned}$$

□

Övning 8.7. Visa att $u * (\psi * \varphi) = (u * \psi) * \varphi$ om $u \in \mathscr{E}', \psi \in \mathscr{D}$ och $\varphi \in C^\infty$.

Sats 8.16. $\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha u * v = u * \partial^\alpha v$.

Bevis. Om $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ är $\partial^\alpha u = \partial^\alpha \delta * u$, ty

$$\partial^\alpha u * \varphi = u * \partial^\alpha \varphi = u * (\delta * \partial^\alpha \varphi) = u * (\partial^\alpha \delta * \varphi) = (u * \partial^\alpha \delta) * \varphi.$$

Vi får med hjälp av detta,

$$\partial^\alpha(u * v) = \partial^\alpha \delta * (u * v) = (\partial^\alpha \delta * u) * v = \partial^\alpha u * v.$$

Den andra likheter följer med hälp av Sats 15 a). □

Sats 8.17. *Antag att $u \in \mathscr{D}'_k$ och $v \in C_0^k$ (eller $u \in \mathscr{E}'_k$, $v \in C^k$). Då är $u * v$ den kontinuerliga funktionen $x \mapsto \langle u_y, v(x-y)\rangle$.*

Bevis. Om $x \to x_0$, så $v(x - \cdot) \to v(x_0 - \cdot)$ i C_0^k. Men u är kontinuerlig på C_0^k, och vi får $\langle u_y, v(x-y)\rangle \to \langle u_y, v(x_0-y)\rangle$, så $h(x) = \langle u_y, v(x-y)\rangle$ är kontinuerlig.

Enligt Definition 9 gäller att $(u * v) * \psi = u * (v * \psi)$. Som i beviset av Sats 2 kan man visa att $h * \psi = u * (v * \psi)$ och alltså $h = u * v$ och påståendet följer.

□

Övning 8.8. Låt $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ med stöd i $\{x \geq 0\}$. Definiera $u * v$.

Övning 8.9. H 4.2.1

Övning 8.10. H 4.2.2

Övning 8.11. H 4.2.3

Övning 8.12. H 4.2.4

Kapitel 9

Fundamentallösningar

Låt

$$P = \sum_{|\alpha \leq N|} a_\alpha \partial^\alpha$$

vara en differentialoperator med konstanta koefficienter och E en fundamentallösning till P, dvs. $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ och $PE = \delta$. Då gäller

$$P(E * f) = f, \quad f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), \tag{9.1}$$

och

$$E * Pu = u, \quad u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n). \tag{9.2}$$

så E är både vänster och högerinvers till P på $\mathscr{E}'$. (1) ger alltså en lösning $u = E * f$ till ekvationen $Pu = f$ om f har kompakt stöd. (2) kan användas till att studera regularitet hos lösningar till $Pu = f$.

Anmärkning 9.1. I Kapitel 14 skall vi visa att varje differentialoperator med konstanta koefficienter har en fundamentallösning. □

I Kapitel 5 bestämde vi fundamentallösningar till Laplace och värmeledningsekvationerna. Ett annat exempel är att

$$E_k(x) = \begin{cases} (x_1 \dots x_n)^k/(k!)^n, & \text{alla } x_i > 0 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

är en fundamentallösning till $P_{k+1} = \partial_1^{k+1} \dots \partial_n^{k+1}$. Med hjälp av detta kan vi bevisa

Sats 9.2. *Om $u \in \mathscr{E}'_m(\mathbb{R}^n)$, så finns en kontinuerlig funktion f med*

$$\partial_1^{m+2} \dots \partial_n^{m+2} f = u.$$

Bevis. E_{m+1} är en fundamentallösning till P_{m+2}. Så $f = E_{m+1} * u$ satisfierar $P_{m+2} f = u$. Enligt Sats 8.17 är f kontinuerlig. □

Ett korrolarium till Sats 1, är följande representationssats för distributioner.

Sats 9.3. *Om $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, så finns $f_\alpha \in C(\Omega)$ med*

$$u = \sum \partial^\alpha f_\alpha$$

i $\mathscr{D}'$. Summa är lokalt ändlig, och om u har ändlig ordning är summan ändlig.

Bevis. Välj en partition av enheten $\psi_i \in C_0^\infty$ och $\chi_i \in C_0^\infty$ med $\chi_i = 1$ på stöd ψ_i. Detta kan göras så att $\Sigma \chi_i$ är lokalt ändlig. Då gäller

$$u(\varphi) = \sum_i \psi_i u(\varphi) = \sum_i \chi_i u(\psi_i \varphi).$$

Nu har $\chi_i u$ kompakt stöd, och alltså ändlig ordning. Sats 1 ger $\chi_i u = \partial^{\alpha_i} f_i$, $f_i \in C$. Så

$$u(\varphi) = \sum_i \partial^{\alpha_i} f_i(\psi_i \varphi) = \sum_i (-1)^{|\alpha_i|} \int_{\mathbb{R}^n} f_i \partial^{\alpha_i} (\psi_i \varphi)\, dx \, .$$

Om vi beräknar $\partial^{\alpha_i}(\psi_i \varphi)$ ger detta

$$u(\varphi) = \sum_i \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f_{i,\alpha} \partial^\alpha \varphi \, dx = \sum_\alpha \sum_i \partial^\alpha f_{i,\alpha}(\varphi) \, .$$

Sätt nu $f_\alpha = \sum_i f_{i,\alpha}$. □

För att studera regulariteten av lösningar till $Pu = f$, vill vi studera den mängd där u inte är C^∞.

Definition 9.4. Singulära stödet till en distribution $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ betecknas $\operatorname{sing\,stöd} u$ och består av de punkter i Ω, som inte har någon omgivning där u är C^∞. □

$\operatorname{sing\,stöd} u$ är den minsta slutna mängd, sådan att u är C^∞ i komplementet. Det är klart att $\operatorname{sing\,stöd} u \subset \text{stöd}\, u$.

Sats 9.5. *Om $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, och minst en har kompakt stöd, så är*

$$\operatorname{sing\,stöd}(u * v) \subset \operatorname{sing\,stöd} u + \operatorname{sing\,stöd} v.$$

Bevis. Sätt $u_1 = u$ och $u_2 = v$. Låt oss först anta att båda distributionerna har kompakt stöd. Låt $K_i = \text{sing stöd } u_i$, Ω_i en omgivning till K_i och tag $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ med $\psi_i = 1$ på K_i. Då är

$$\begin{aligned} u_1 * u_2 = &(\psi_1 u_1 + (1-\psi_1)u_1) * (\psi_2 u_2 + (1-\psi_2)u_2) \\ =&\psi_1 u_1 * \psi_2 u_2 + \psi_1 u_1 * (1-\psi_2)u_2 \\ &+(1-\psi_1)u_1 * \psi_2 u_2 + (1-\psi_1)u_1 * (1-\psi_2)u_2. \end{aligned}$$

Eftersom $(1-\psi_i)u_i \in C_0^\infty$, är enligt Sats 8.1 de tre sista termerna C^∞. Alltså är

$$\begin{aligned} &\operatorname{sing\,stöd}(u_1 * u_2) = \operatorname{sing\,stöd}(\psi_1 u_1 * \psi_2 u_2) \\ &\subset \operatorname{stöd}(\psi_1 u_1 * \psi_2 u_2) \subset \operatorname{stöd}\psi_1 + \operatorname{stöd}\psi_2 \subset \Omega_1 + \Omega_2. \end{aligned}$$

Då $\Omega_i \downarrow K_i$, får vi påståendet.

Om inte båda distributionerna har kompakt stöd, kan vi enligt Sats 8.15 anta att $v \in \mathscr{E}'$. För att visa att $\operatorname{sing\,stöd} u*v \subset \operatorname{sing\,stöd} u + \operatorname{sing\,stöd} v$ räcker det att visa att $\operatorname{sing\,stöd} u*v \cap B_1(x) \subset (\operatorname{sing\,stöd} u + \operatorname{sing\,stöd} v) \cap B_1(x)$ för varje $x \in \mathbb{R}^n$.

Låt nu $R \geq 1$ vara så stort att $\operatorname{stöd} v \subset B_R(0)$ och $|x| \leq R$ och tag $\chi \in C_0^\infty(B_{6R}(0))$ med $\chi = 1$ på $B_{5R}(0)$. Sätt $u_1 = \chi u$ och $u_2 = (1-\chi)u$. Så $u = u_1 + u_2$ där u_1 har kompakt stöd och $\operatorname{stöd} u_2 \subset B_{5R}^C(0)$. Då gäller $\operatorname{stöd} u_2 * v \subset B_{5R}^C(0) + B_R(0) \subset B_{4R}^C(0)$ och $B_1(x) \subset B_{2R}(0)$. Alltså är $u_2 * v = 0$ på $B_1(x)$ och

$$\begin{aligned} &\operatorname{sing\,stöd}(u*v) \cap B_1(x) = \operatorname{sing\,stöd}(u_1 * v) \cap B_1(x) \\ \subset &(\operatorname{sing\,stöd} u_1 + \operatorname{sing\,stöd} v) \cap B_1(x) = (\operatorname{sing\,stöd} u + \operatorname{sing\,stöd} v) \cap B_1(x), \end{aligned}$$

och satsen är bevisad. □

Sats 9.6. *Om P har en fundamentallösning med* $\operatorname{sing\,stöd} E = \{0\}$*, så är* $\operatorname{sing\,stöd} u = \operatorname{sing\,stöd} Pu$*, $u \in \mathscr{D}'$.*

Anmärkning 9.7. Omvändningen gäller också. Så om det finns en fundamentallösning med singulärt stöd i origo, så har alla det. □

Bevis. $\operatorname{sing\,stöd} Pu \subset \operatorname{sing\,stöd} u$ gäller alltid, ty om u är C^∞, så är också Pu det. För den omvända inklusionen observerar vi först att om u har kompakt stöd, så är $u = E * Pu$ och enligt Sats 5 är

$$\operatorname{sing\,stöd} u \subset \operatorname{sing\,stöd} E + \operatorname{sing\,stöd} Pu = \operatorname{sing\,stöd} Pu.$$

Om u inte har kompakt stöd, så tag $\psi \in C_0^\infty$ med $\psi = 1$ på en öppen mängd Ω. Då är

$$\operatorname{sing\,stöd} \psi u \subset \operatorname{sing\,stöd} P(\psi u).$$

Men på Ω är $P(\psi u) = Pu$ och $\psi u = u$, och resultatet följer. $\square$

En differentialoperator P kallas *hypoelliptisk* om varje lösning u till $Pu = f$ är C^∞ då f är det. Sats 6 visar alltså att P är hypoelliptisk om P har en fundamentallösning E med $\operatorname{sing\,stöd} E = \{0\}$. Laplace och värmelednings-operatorerna är hypoelliptiska. I Kapitel 12 skall vi visa att alla elliptiska operatorer är hypoelliptiska. Laplaceoperatorn är elliptisk, men inte värmeledningsoperatorn.

Övning 9.1. Visa att $P(\frac{d}{dx})$ har en fundamentallösning för varje polynom (av en variabel).

Övning 9.2. H 4.4.3

Övning 9.3. H 4.4.4

Övning 9.4. H 4.4.5

Övning 9.5. H 4.4.6

Övning 9.6. H 4.4.9

Kapitel 10

Fouriertransformen

Om u är en "snäll" funktion av en variabel med period T så kan u skrivas

$$u(x) = \sum_\nu c_\nu e^{2\pi i\nu x/T}. \tag{10.1}$$

Då är

$$u(x)e^{-2\pi imx/T} = \sum_\nu c_\nu e^{2\pi i(\nu-m)x/T},$$

så integration över $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ ger (formellt)

$$Tc_\nu = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x)^{-2\pi i\nu x/T} dx$$

eller

$$c_\nu = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x)e^{-2\pi i\nu x/T} dx$$

c_ν kallas för Fourierkoefficienterna till u. (1) är inversionssatsen. Man kan också bevisa Parsevals relation,

$$\sum |c_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi}\|u\|_2^2 .$$

Hur skall detta generaliseras till $\mathbb{R}^n$? Låt oss först betrakta fallet $n = 1$. Låt $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ och välj T så stort att $\operatorname{stöd} u \subset (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. Låt u_T vara den periodiska utvidgningen av u,

$$u_T(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u(x - kT).$$

Då är

$$c_T(\nu) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(x)e^{-i\frac{2\pi\nu}{T}x}dx.$$

Så för $|x| < \frac{T}{2}$ ger (1)

$$u(x) = u_T(x) = \sum_\nu c_T(\nu)e^{2\pi i\frac{\nu}{T}x}.$$

Definiera nu

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Vi observerar att $c_T(\nu) = \frac{1}{T}\widehat{u}(\frac{2\pi\nu}{T})$, så vi kan skriva

$$u(x) = \sum_\nu \frac{1}{T}\widehat{u}(\frac{2\pi\nu}{T})e^{2\pi i\frac{\nu}{T}x} = \frac{1}{2\pi}\sum_\nu \frac{2\pi}{T}\widehat{u}(\frac{2\pi\nu}{T})e^{i\frac{2\pi\nu}{T}x} .$$

Detta är en Riemannsumma till integralen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

Så låter vi $T \to \infty$, får vi

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{10.2}$$

Med lite nogrannhet i argumentet kan detta göras till ett bevis för (2) då u är en snäll funktion. Vi skall inte genomföra detta utan bevisa (2) (och dess generalisering till $\mathbb{R}^n$) direkt. Teorin för Fourierserier blir sedan ett korollarium till teorin för Fouriertransformen.

Definition 10.1. För $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definierar vi Fouriertransformen av f genom

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

där $x\xi = \sum_1^n x_i\xi_i$. Vi skriver ibland $\mathcal{F}f$ istället för $\widehat{f}$.

□

Vi skall bevisa följande viktiga egenskaper hos Fouriertransformen.

I. Inversionssatsen. Om f och $\widehat{f} \in L^1$ så är

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

II. Parseval. Om $f \in L^1 \cap L^2$, så är $\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|\widehat{f}\|_2$.

III. Om $f, g \in L^1$ så gäller $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

IV. $\mathcal{F}(P(D)f)(\xi) = P(\xi)\widehat{f}(\xi)$ där $D_j = -i\partial_j$.

Övning 10.1. Bevisa Riemann-Lebesgues lemma: Om $f \in L^1$ så är $\widehat{f}$ kontinuerlig och $\widehat{f}(\xi) \to 0$ då $|\xi| \to \infty$.

Övning 10.2. Bevisa III och IV.

För all lösa differentialekvationen $P(D)u = f$ kan vi använda I och IV. Fouriertransformering ger $P(\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. Så $\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)/P(\xi)$ och $u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}/P)$. För att kunna använda denna metod "ofta", vill vi definiera Fouriertransformen av en distribution. Som motivering för definitionen, observerar vi att Fubinis sats ger

Proposition 10.2. *Om $f, g \in L^1$ så* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}g\,dx.$

Övning 10.3. Bevisa Proposition 2.

Så för en L^1-funktion gäller

$$\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{\varphi}\,dx = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle.$$

Vi vill alltså definiera $\widehat{u}$ då $u \in \mathscr{D}'$ genom

$$\langle \widehat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \widehat{\varphi}\rangle. \tag{10.3}$$

Men om $\varphi \in \mathscr{D}, \varphi \not\equiv 0$, så kan inte $\widehat{\varphi}$ ha kompakt stöd och alltså gäller $\widehat{\varphi} \notin \mathscr{D}$. Därför är inte $\langle u, \widehat{\varphi}\rangle$ definierat.

Vad skall vi då göra? Jo, vi betraktar en annan klass av testfunktioner $\mathscr{S}$, Schwartzklassen eller de snabbt avtagande funktionerna.

Definition 10.3.

(a) $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ om $\varphi \in C^\infty$ och $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^k|\partial^\alpha\varphi(x)| < \infty$ för alla k och α.

(b) $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ om

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^k|\partial^\alpha\varphi_j(x)| \to 0$$

för all k och α. □

Definition 10.4.

(a) En *tempererad distribution* på $\mathbb{R}^n$ är en linjär funktional på $\mathscr{S}$ sådan att $u(\varphi_j) \to 0$ då $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}$. Vi skriver $u \in \mathscr{S}'$.

(b) En följd $u_j \in \mathscr{S}'$ konvergerar mot $u \in \mathscr{S}'$ om

$$u_j(\varphi) \to u(\varphi),$$

för varje testfunktion $\varphi \in \mathscr{S}$.

$\square$

Vi skall visa att (3) är en riktig definition om $u \in \mathscr{S}'$. För att se detta skall vi först studera Fouriertransformen på $\mathscr{S}$. Vi börjar med följande

Proposition 10.5. *Om $f, g \in \mathscr{S}$ så gäller*

(a) $$\mathcal{F}(x^\alpha f(x)) = i^\alpha \partial^\alpha \widehat{f}$$

(b) $$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

(c) $$(\tau_h f)^\wedge(\xi) = e^{-i\xi h}\widehat{f}(\xi)$$

(d) $$\mathcal{F}(e^{ixh} f(x)) = \tau_h \widehat{f}$$

(e) $$\widehat{f_a}(\xi) = \widehat{f}(a\xi)$$

(f) $$(f(ax))^\wedge = (\widehat{f})_a$$

(g) $$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g$$

(h) $$(f * g)^\wedge = \widehat{f}\,\widehat{g}$$

och

(i) $$\widehat{f} \in \mathscr{S}.$$

Övning 10.4. Bevisa Proposition 5.

Sats 10.6 (Inversionssatsen)**.** *Om $f \in \mathscr{S}$ så gäller*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{10.4}$$

För att bevisa detta behöver vi hitta *en* funktion som uppfyller (4). Sedan följer (4) från Proposition 5. Vi väljer $G(x) = e^{-|x|^2/2}$.

Lemma 10.7. $\widehat{G} = (2\pi)^{n/2} G$.

Bevis. Fubinis sats visar att det räcker att behandla fallet $n = 1$. G uppfyller differentialekvationen

$$G'(x) + xG(x) = 0.$$

Fouriertransformerar vi denna ekvation ger Proposition 5 (a) och (b)

$$i\xi\widehat{G}(\xi) + i\widehat{G}'(\xi) = 0,$$

eller

$$\widehat{G}'(\xi) + \xi G(\xi) = 0.$$

Så $\widehat{G}(\xi) = CG(\xi)$. Sätter vi $\xi = 0$, får vi

$$C = \widehat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

□

Övning 10.5.
a) Bevisa Lemma 1 med hjälp av Cauchys sats.
b) Bevisa Lemma 1 genom att låta $\xi = \zeta \in \mathbb{C}$, och beräkna $\widehat{G}(i\eta)$.

Bevis av Sats 6. $\frac{1}{(2\pi)^n}(\widehat{G})_\delta$ än en approximativ identitet. Proposition 5 f) och g) ger

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\widehat{G})_\delta(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) G(\delta\xi) d\xi.$$

Låter vi $\delta \to 0$, får vi

$$f(0) = G(0) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Övning 10.6. Bevisa det.

Tillämpar vi detta på $\tau_{-x} f$, får vi

$$f(x) = \tau_{-x} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_{-x} f)^\wedge(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

□

Anmärkning 10.8. Om vi bara antar att $f \in L^1$ så

$$\frac{1}{(2\pi)^n} f*(\widehat{G})_\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\widehat{G}_\delta(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}e^{-\delta^2|\xi|^2/2}d\xi.$$

Detta ger

$$f(x) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}e^{-\delta^2|\xi|^2/2}d\xi,$$

med konvergens i L^1. Om speciellt $\widehat{f} \in L^1$, så gäller

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \quad \text{n.ö.}$$

□

Sats 10.9 (Plancherel)**.** *Om $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ så är*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\bar{\psi}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}\,\overline{\widehat{\psi}}\, d\xi\ .$$

Korollarium 10.10 (Parseval)**.** *Om $\phi \in \mathscr{S}$ så*

$$\|\phi\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|\widehat{\phi}\|_2$$

.

Bevis. Proposition 2 g) ger

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\widehat{\psi}_0\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}\psi_0\, dx\ .$$

Låt $\widehat{\psi}_0 = \bar{\psi}$. Då är enligt inversionssatsen

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\widehat{\psi}_0(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\bar{\psi}(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\psi(\xi)d\xi} = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\widehat{\psi}(x)}.\end{aligned}$$

Så $\int_{\mathbb{R}^n} \phi\bar{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}\overline{\widehat{\psi}}$. Korollariet följer om vi tar $\psi = \phi$. □

Anmärkning 10.11. Parsevals formel gäller också då $\phi, \psi \in L^2$. Vi skall visa det senare. □

För att visa att $\widehat{u}$, definierad genom $\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi})$, är en tempererad distribution behöver vi följande.

Lemma 10.12. *$\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ kontinuerligt, dvs. om $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}$ så $\widehat{\varphi}_j \to 0$ i $\mathscr{S}$.*

Bevis. Proposition 5 a) och b) ger $\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}_j(\xi) = c\mathcal{F}\big(\partial^\beta(x^\alpha \varphi_j(x))\big)(\xi)$.
Så

$$\begin{aligned}
&\sup_\xi |\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}_j(\xi)| \leq c \sup_\xi \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \partial^\beta (x^\alpha \varphi_j(x)) dx \right| \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta (x^\alpha \varphi_j(x))| dx \to 0,
\end{aligned}$$

då $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}$. □

Vi kan nu göra följande

Definition 10.13. Om $u \in \mathscr{S}'$ är $\widehat{u}$ den tempererade distribution som ges av

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}).$$

□

Anmärkning 10.14. Vi observerar att de två definitionerna vi har av $\widehat{f}$ då $f \in L^1$ sammanfaller. □

Sats 10.15. *Fouriertransformen är en kontinuerlig linjär bijektion av $\mathscr{S}'$ på $\mathscr{S}'$ med $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \overset{\vee}{u}$.*

Bevis. Vi påminner om att $\overset{\vee}{u}$ definieras genom $\overset{\vee}{u}(\varphi) = u(\overset{\vee}{\varphi})$, och $u_j \to u$ i $\mathscr{S}'$ betyder att $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ för alla $\varphi \in \mathscr{S}$. Satsen är en enkel följd av motsvarande egenskaper på $\mathscr{S}$:

$$\widehat{\widehat{u}}(\varphi) = \widehat{u}(\widehat{\varphi}) = u(\widehat{\widehat{\varphi}}) = (2\pi)^n u(\overset{\vee}{\varphi}) = (2\pi)^n \overset{\vee}{u}(\varphi)$$

och

$$\widehat{u}_j(\varphi) = u_j(\widehat{\varphi}) \to u(\widehat{\varphi}) = \widehat{u}(\varphi)$$

om $u_j \to u$ i $\mathscr{S}'$. □

Exempel 10.16. a) Ett mått med $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-k} d\mu(x) < \infty$ för något k är en tempererad distribution.

b) Om $f \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$, så $f \in \mathscr{S}'$. (Bevis. Hölders olikhet)

c) $\widehat{\delta} = 1$ och $\widehat{1} = (2\pi)^n \delta$.

d) e^x är ingen tempererad distribution. □

Proposition 10.17. *Om $u \in \mathscr{S}'$ så gäller*

a) $(x_j u)^\wedge = -D_j \widehat{u}$

b) $(D_j u)^\wedge = \xi_j \widehat{u}$

c) $(\tau_h u)^\wedge(\xi) = \exp(-ih\xi)\widehat{u}(\xi)$

och

d) $\mathcal{F}(\exp(ixh)u) = \tau_h \widehat{u}$.

Bevis. Det är lätt att se att $D_j u, x_j u, \ldots$ är tempererade distributioner. Formlerna följer sedan från Proposition 5. (Kom ihåg att $D_j = -i\partial_j$.) □

Övning 10.7. Visa att $e^x \cos(e^x) \in \mathscr{S}'$.

Övning 10.8. Visa att $u \in \mathscr{S}'$ omm

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{k+|\alpha| \leq N} \sup(1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

för något N.

Övning 10.9. H 7.1.10

Övning 10.10. H 7.1.19

Övning 10.11. H 7.1.20

Övning 10.12. H 7.1.21

Övning 10.13. H 7.1.22

Övning 10.14. H 7.6.1

Kapitel 11

Fouriertransformen på L^2

Enligt Exempel 10.16b) så har $f \in L^2$ en Fouriertransform definierad som en tempererad distribution.

Sats 11.1. *Om $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ så $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ och*

$$\|f\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|\hat{f}\|_2.$$

Vidare ges $\hat{f}$ av

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{N\to\infty} \int_{|x|\le N} e^{-i\xi x} f(x)dx$$

med konvergens i L^2.

Bevis. Tag $f_n \in C_0^\infty$, $f_n \to f$ i L^2. Då är f_n en Cauchyföljd i L^2. Plancherels sats ger

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = c\|f_n - f_m\|_2 \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Så $\hat{f}_n$ är också en Cauchyföljd i L^2. Men L^2 är fullständigt så $\hat{f}_n \to g$ i L^2 för någon funktion $g \in L^2$. Men då gäller också $\hat{f}_n \to g$ i $\mathscr{S}'$. Vidare så $f_n \to f$ i $\mathscr{S}'$, och eftersom Fouriertransformen är kontinuerlig på $\mathscr{S}'$ har vi $\hat{f}_n \to \hat{f}$ i $\mathscr{S}'$. Så $g = \hat{f}$. Vi får

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|f\|_2.$$

Låt nu $f_N = f\chi_{|x|\le N}$. Då gäller $f_N \to f$ i L^2 och $f_N \in L^1$. Så

$$\hat{f}_N(\xi) = \int_{|x|\le N} e^{-ix\xi} f(x)dx,$$

och Plancherels sats ger

$$\|\hat{f} - \hat{f}_N\|_2 = c\|f - f_N\|_2 \to 0, \quad N \to \infty,$$

och vi är klara.

$\square$

Kapitel 12

Fouriertransformen och faltningar

Vi skall visa att under lämpliga villkor gäller $(u * v)^\wedge = \widehat{u}\,\widehat{v}$.

Vi börjar med att observera att $\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset C^\infty$. Inklusionerna är kontinuerliga, dvs. om $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{D}$ så gäller $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}$ och detta medför i sin tur att $\varphi_j \to 0$ i C^∞. Vidare är $\mathscr{D}$ tätt i $\mathscr{S}$ som är tätt i C^∞. (Visa det!) Så

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Definition 12.1. Om $u \in \mathscr{S}'$ och $\phi \in \mathscr{S}$ så definierar vi faltningen $u * \phi$ genom $u * \phi(x) = \langle u_y, \phi(x-y)\rangle$. $\square$

Sats 12.2. *Om $u \in \mathscr{S}'$ och $\phi \in \mathscr{S}$ så gäller*

(a) $u * \phi \in C^\infty$ *och* $\partial^\alpha(u * \phi) = \partial^\alpha u * \phi = u * \partial^\alpha \phi$

(b) $u * \phi$ *majoreras av ett polynom (så $u * \phi \in \mathscr{S}'$) och* $(u * \phi)^\wedge = \widehat{\phi}\,\widehat{u}$.

(c) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi \quad (\psi \in \mathscr{S})$

och

(d) $\widehat{u} * \widehat{\phi} = (2\pi)^n (\phi u)^\wedge$.

Bevisskiss. (a) Vi antar att $n = 1$. Den andra likheten bevisas på samma sätt som i Sats 8.1. Som i beviset av Sats 8.1 följer den första likheten om vi kan visa att

$$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \longrightarrow \phi'(x) \text{ i } \mathscr{S}.$$

Det är elementärt men jobbigt att göra det. Enklast är (nog) att Fouriertransformera.

(b) Enligt Övning 10.8 gäller

$$\begin{aligned}|u*\phi(x)| &= |\langle u_y, \phi(x-y)\rangle| \\ &\le C\sup_y \sum_{k+|\alpha|\le N}(1+|y|^2)^k|\partial^\alpha\phi(x-y)| \\ &\le C\sup_y \sum_{k+|\alpha|\le N}(1+|x|^2)^k(1+|x-y|^2)^k|\partial^\alpha\phi(x-y)| \\ &\le C(1+|x|^2)^N.\end{aligned}$$

Vidare gäller för $\psi \in \mathscr{D}$ att

$$(u*\phi)^\wedge(\widehat{\psi}) = (u*\phi)(\widehat{\widehat{\psi}}) = (2\pi)^n(u*\phi)(\check{\psi}) = (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} u*\phi(x)\psi(-x)dx$$

$$= (2\pi)^n\int_{-K}\langle u_y, \psi(-x)\phi(x-y)\rangle dx = \text{ Approximiera med Riemannsumma } =$$

$$= (2\pi)^n\langle u_y, \int_{\mathbb{R}^n}\psi(-x)\phi(x-y)dx\rangle = (2\pi)^n\langle u_y, \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\phi(-y-x)dx\rangle$$

$$= (2\pi)^n\langle u_y, (\phi*\psi)^\vee)\rangle = \langle u_y, (\phi*\psi)^{\wedge\wedge}\rangle = \widehat{u}((\phi*\psi)^\wedge) = \widehat{u}(\widehat{\phi}\widehat{\psi}) = \widehat{\phi}\,\widehat{u}(\widehat{\psi}).$$

Men $\widehat{\mathscr{D}}$ är tätt i $\mathscr{S}$, och (b) följer.

(c) Från beviset av (b) får vi

$$u*\phi(\check{\psi}) = u((\phi*\psi)^\vee),$$

först för $\psi \in \mathscr{D}$, men på grund av kontinuiteten också för $\psi \in \mathscr{S}$. Detta kan skrivas

$$(u*\phi)*\psi(0) = u*(\phi*\psi)(0).$$

Det allmänna fallet följer om vi ersätter ψ med $\tau_{-x}\psi$.

(d) Från (b) har vi $(\widehat{u}*\widehat{\phi})^\wedge = \widehat{\widehat{\phi}}\,\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^{2n}\,\check{\phi}\check{u} = (2\pi)^{2n}(\phi u)^\vee = (2\pi)^n(\phi u)^{\wedge\wedge}$. Inversionssatsen ger $\widehat{u}*\widehat{\phi} = (2\pi)^n(\phi u)^\wedge$.

□

Sats 12.3. *Om $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ så $\widehat{u} \in C^\infty$ och $\widehat{u}(\xi) = u_x(e^{-ix\xi})$.*

Bevis. Låt $\psi \in C_0^\infty$ vara 1 på en omgivning av stöd u. Då är $\widehat{u} = (\psi u)^\wedge = (2\pi)^{-n}\widehat{u}*\widehat{\psi} \in C^\infty$ enligt Sats 2(d). Så

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi) &= \\ &= (2\pi)^{-n}\widehat{u}*\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-n}\langle\widehat{u}_x, \widehat{\psi}(\xi-x)\rangle = (2\pi)^{-n}\langle\widehat{u}_x, \check{\widehat{\psi}}\,(x-\xi)\rangle \\ &= (2\pi)^{-2n}\langle\widehat{u}_x, \mathcal{F}^3\psi(x-\xi)\rangle = (2\pi)^{-2n}\langle\widehat{u}_x, \tau_\xi\mathcal{F}^3\psi(x)\rangle \\ &= (2\pi)^{-2n}\langle u_x, e^{-ix\xi}\mathcal{F}^4\psi(x)\rangle = u_x(e^{-i\xi x}\psi(x)) = u_x(e^{-i\xi x}).\end{aligned}$$

□

Anmärkning 12.4. Senare skall vi bevisa Paley-Wieners sats som ger mycket precisare information om $\widehat{u}$ då $u \in \mathscr{E}'$. $\square$

Exempel 12.5. Beräkna Fouriertransformen av $\mathrm{pv}\dfrac{1}{x}$. $\square$

Metod 1. Låt $u = \mathrm{pv}\dfrac{1}{x}$. Då är u summan av en distribution i $\mathscr{E}'$ och en L^2-funktion. Så

$$\widehat{u}(\xi) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{\epsilon<|x|<N} e^{-ix\xi}\frac{dx}{x}.$$

Om $\xi > 0$ så ger variabelbytet $y = x\xi$,

$$\widehat{u}(\xi) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ N\to\infty}} \int_{\epsilon<|x|<N} \frac{e^{-iy}}{y}dy = -i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy = -i\pi.$$

Om $\xi < 0$, får vi i stället $\widehat{u}(\xi) = i\pi$. Så

$$\widehat{u}(\xi) = -\pi \text{ sgn } \xi.$$

Övning 12.1. Visa att $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy = \pi$.

Metod 2. Vi har $x\,\mathrm{pv}\dfrac{1}{x} = 1$ vilket ger $i\widehat{u}' = 2\pi\delta$. Så $\widehat{u}' = -2\pi i\delta$ och $\widehat{u} = -2\pi i(H + c)$. Eftersom u är udda är $\widehat{u}$ udda. Alltså är $c = -\frac{1}{2}$ och

$$\widehat{u}(\xi) = -i\pi \text{ sgn } \xi.$$

I det sista argumentet använde vi att om u är udda så är också $\widehat{u}$ det. Detta är klart om $f \in L^1$ (enkelt variabelbyte).

Definition 12.6. En distribution är udda om $\check{u} = -u$. $\square$

Proposition 12.7. *Om u är en udda tempererad distribution så är dess Fouriertransform också udda.*

Bevis. Vi har enligt Sats 10.15

$$\check{\widehat{u}} = (2\pi)^{-n}\,\widehat{\widehat{\widehat{u}}} = \left((2\pi)^{-n}\,\widehat{\widehat{u}}\right)^{\wedge} = \widehat{\check{u}} = (u \text{ är udda}) = -\widehat{u}\,.$$

$\square$

På samma sätt ser vi att Fouriertransformen av en jämn distribution är jämn.

Anmärkning 12.8. Avbildningen $H\varphi = \mathrm{pv}\frac{1}{x} * \varphi$ kallas Hilberttransformen, och är ett viktigt exempel på en singulär integraloperator. För Hilberttransformen gäller följande

Sats 12.9. *Hilberttransformen är begränsad på* L^p, $1 < p < \infty$, *och svag typ* $(1,1)$.

Exempel 5 och Plancherels sats bevisar detta då $p = 2$. □

Härnäst skall vi studera invariansegenskaper hos Fouriertransformen. Låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en diffeomorfism (dvs. en C^∞-bijektion). Om u är en funktion så gäller

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \circ F(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\frac{\varphi}{|F'|} \circ F^{-1}(y)dy.$$

Så om $u \in \mathscr{D}'$ definierar vi $u \circ F$ genom

$$\langle u \circ F, \varphi\rangle = \langle u, \frac{\varphi}{|F'|} \circ F^{-1}\rangle$$

Speciellt om $F = \Lambda$ är linjär så är

$$\langle u \circ \Lambda, \varphi\rangle = |\det\Lambda|^{-1}\langle u, \varphi \circ \Lambda^{-1}\rangle$$

□

Definition 12.10. En distribution u är radiell om $u \circ O = u$ för alla ortogonala matriser O.

Sats 12.11. *Om u är en radiell tempererad distribution så är $\widehat{u}$ radiell.*

Bevis. Vi observerar först att om $\varphi \in \mathscr{S}$ så är

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi} \circ O(\xi) = \widehat{\varphi}(O\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixO\xi}\varphi(x)dx \\ = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iO^*x\xi}\varphi(x)dx &= \begin{bmatrix} y = O^*x \\ x = Oy \end{bmatrix} \\ = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi}\varphi(Oy)dy &= (\varphi \circ O)^\wedge(\xi).\end{aligned}$$

Vi får nu

$$\begin{aligned}&\langle \widehat{u} \circ O, \varphi\rangle = \langle \widehat{u}, \varphi \circ O^{-1}\rangle = \langle u, (\varphi \circ O^*)^\wedge\rangle \\ &= \langle u, \widehat{\varphi} \circ O^*\rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \circ O^{-1}\rangle = \langle u \circ O, \widehat{\varphi}\,\rangle = \langle u, \widehat{\varphi}\,\rangle = \langle \widehat{u}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

□

Sats 12.12. *Om u är en tempererad distribution som är homogen av grad α så är $\widehat{u}$ homogen av grad $-n-\alpha$.*

Bevis. Enligt Definition 4.4 är $u \in \mathscr{S}'$ homogen av grad α om $\langle u, \varphi_t\rangle = t^\alpha\langle u, \varphi\rangle$. Därför gäller

$$\begin{aligned}&\langle \widehat{u}, \varphi_t\rangle = \langle u, \widehat{\varphi}_t\rangle = \langle u_\xi, \widehat{\varphi}(t\xi)\rangle = t^{-n}\langle u, (\widehat{\varphi})_{1/t}\rangle \\ &= t^{-(n+\alpha)}\langle u, \widehat{\varphi}\rangle = t^{-(n+\alpha)}\langle \widehat{u}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

□

Exempel 12.13. En fundamentallösning till Δ då $n \geq 3$. Om vi Fouriertransformerar

$$\Delta u = \delta,$$

får vi

$$-|\xi|^2\widehat{u}(\xi) = 1.$$

En lösning är

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^2}.$$

Observera att $\frac{1}{|\xi|^2} \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$ om $n \geq 3$, och att $\frac{1}{|\xi|^2}$ är radiell och homogen av grad -2. Så u är radiell och homogen av grad $2-n$. Alltså är

$$u(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}.$$

Argument. Om $n = 3$ så $\frac{1}{|\xi|^2} \in L^1 + L^2$, och u är en funktion. För $n > 4$ så $\frac{1}{|x|^{n-2}} \in L^1 + L^2$, och vi kan argumentera som ovan med hjälp av inversionssatsen. Om $n = 4$ gäller att $u_\epsilon = \dfrac{1}{|x|^{2+\epsilon}} \in L^1 + L^2$ så dess Fouriertransform är en konstant gånger $\dfrac{1}{|\xi|^{2-\epsilon}}$ och påståendet följer om vi låter $\epsilon \to 0$.

Ett alternativt sätt är Övning 4 nedan.

Övning 12.2. Bestäm c_n.

Övning 12.3. Vad händer då $n = 2$?

Övning 12.4. Bestäm alla radiella distributioner i $\mathbb{R}^n$ som är homogena av grad α.

Ledning. Behandla först $\mathbb{R}$. Derivera $\langle u, \varphi_t\rangle = t^\alpha\langle u, \varphi\rangle$ med avseende på t.
Varning. Var försiktig med $-\alpha = n, n+2, n+4, \ldots$.

Övning 12.5. Vad är Fouriertransformen av $\text{fp}|x|^\alpha$ i $\mathbb{R}$?

Övning 12.6. Vad bör man mena med $\text{fp}|x|^\alpha$ i $\mathbb{R}^n$? Vad är dess Fouriertransform?

Övning 12.7. Bestäm en fundamentallösning till värmeledningsekvationen.

Ledning. Bestäm $\mathcal{F}E(x,t)$ där $\mathcal{F}$ är Fouriertransformen med avseende på $x \in \mathbb{R}^n$.

Sats 12.14. *Om $u \in \mathscr{S}'$ och $v \in \mathscr{E}'$ så $u * v \in \mathscr{S}'$ och*

$$(u * v)^\wedge = \widehat{v}\,\widehat{u}.$$

Bevis. Om $\varphi \in C_0^\infty$ så är

$$u * v(\varphi) = (u * v) * \overset{\vee}{\varphi}(0) = u * (v * \overset{\vee}{\varphi})(0) = u((v * \overset{\vee}{\varphi})^\vee) = u(\overset{\vee}{v} * \varphi).$$

För att se att $u * v \in \mathscr{S}'$, behöver vi visa att $\overset{\vee}{v} * \varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}$ när $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}$. Låt K vara en kompakt omgivning av stöd v och k ordningen av v. Då gäller

$$|\partial^\beta(\overset{\vee}{v} * \varphi_j)(x)| = |\langle v_y, \partial^\beta \varphi_j(y - x)\rangle| \le C \sum_{|\gamma| \le k} \sup_{y \in K} |\partial^{\beta+\gamma}\varphi_j(x - y)|.$$

Så

$$(1+|x|^2)^\ell |\partial^\beta(\overset{\vee}{v} * \varphi_j)(x)| \le C \sum_{|\gamma| \le k} (1+|x|^2)^\ell \sup_{y \in K} |\partial^{\beta+\gamma}\varphi_j(x-y)| \to 0, \quad j \to \infty.$$

För att beräkna Fouriertransformen observerar vi att

$$\begin{aligned}
&(u * v)^\wedge(\varphi) = u * v(\widehat{\varphi}) = u(\overset{\vee}{v} * \widehat{\varphi}) \\
&= (2\pi)^{-n} u(\widehat{\widehat{v}} * \widehat{\varphi}) = u((\widehat{v}\varphi)^\wedge) = \widehat{u}(\widehat{v}\varphi) = \widehat{v}\,\widehat{u}(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Övning 12.8. Beräkna $(\frac{1}{1+x^2})^{*n}$ och $(e^{-x^2})^{*n}$.

Övning 12.9. H 7.1.6

Övning 12.10. H 7.1.7

Övning 12.11. H 7.1.9

Övning 12.12. H 7.1.11

Övning 12.13. H 7.1.18

Övning 12.14. H 7.1.28

Kapitel 13

Paley-Wieners sats

Om $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ vet vi att $\hat{u} \in C^\infty$ och

$$\hat{u}(\xi) = u(e^{-ix\xi}).$$

Vi skall visa att $\hat{u}$ kan utvidgas till en analytisk funktion i $\mathbb{C}^n$, dvs. $\hat{u}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ är analytisk i varje variabel. Vi börjar med en version av satsen för testfunktioner.

Proposition 13.1.

(a) *Om $\phi \in C_0^\infty$ och stöd $\phi \subset \{x; |x| \leq R\}$, så är*

$$\hat{\phi}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\zeta} \phi(x) dx$$

en hel funktion med

$$|\hat{\phi}(\zeta)| \leq C_N (1 + |\zeta|)^{-N} e^{R|\operatorname{Im} \zeta|} \tag{13.1}$$

för alla N.

(b) *Omvänt, om $\hat{\phi}$ är hel och uppfyller (1), så gäller $\phi \in C_0^\infty$ och stöd $\phi \subset \{x; |x| \leq R\}$.*

Bevis. (a) Att $\hat{\phi}$ är analytisk ser vi genom att derivera under integralteckenet. Vidare är om $\zeta = \xi + i\eta$,

$$|\hat{\phi}(\zeta)| \leq \int_{|x| \leq R} e^{x\eta} |\phi(x)| dx \leq C e^{R|\eta|} \tag{13.2}$$

(1) följer nu om vi använder (2) på $D^\alpha \phi$.

(b) Vi observerar först att $\phi \in C^\infty$, eftersom vi kan derivera under integraltecknet i Fouriers inversionsformel på grund av att $\hat{\phi}$ är snabbt avtagande. På grund av de snabba avtagandet och Cauchys sats kan vi byta integrationskontur och integrera över $\{\zeta; \mathrm{Im}\zeta_i = \eta_i\}$. Vi får

$$|\phi(x)| = \left|(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix(\xi+i\eta)}\hat{\phi}(\xi+i\eta)d\xi\right| \le Ce^{-x\eta}e^{R|\eta|}.$$

Sätter vi $\eta = tx$, får vi

$$|\phi(x)| \le Ce^{-t|x|(|x|-R)}.$$

Så om $|x| > R$, ser vi genom att låt $t \to \infty$ att $\phi(x) = 0$. Så
stöd $\phi \subset \{x; |x| \le R\}$. $\square$

För distributioner gäller

Sats 13.2 (Paley-Wieners sats)**.**

(a) *Om u är en distribution av ordning N med stöd i $\{x; |x| \le R\}$ så är $\hat{u}$ en hel funktion och*

$$|\hat{u}(\zeta)| \le C(1+|\zeta|)^N e^{R|\mathrm{Im}\,\zeta|}. \tag{13.3}$$

(b) *Omvänt, om $\hat{u}$ är hel och uppfyller* (3) *för något N, så är u en distribution med stöd i $\{x; |x| \le R\}$.*

Bevis. (a) Att $\hat{u}$ är hel följer av att

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\hat{u}(\zeta) = \frac{\partial}{\partial\zeta_i}u(e^{-ix\zeta}) = u\Big(\frac{\partial}{\partial\zeta_i}(e^{-ix\zeta})\Big).$$

Den sista likheten beror på att

$$\frac{e^{-ix(\zeta+\omega_i)} - e^{-ix\zeta}}{\omega_i} \to \frac{\partial}{\partial\zeta_i}(e^{-ix\zeta}) \text{ i } C^\infty, \quad \omega_i \to 0.$$

För att bevisa (3) fixerar vi $\chi_\delta \in C_0^\infty$ med $\chi_\delta = 1$ i en omgivning av $\{x; |x| \le R\}$ och stöd $\chi_\delta \subset \{x; |x| < R+\delta\}$. Vi kan välja χ_δ så att $\|D^\alpha\chi_\delta\|_\infty \le C\delta^{-|\alpha|}$. Vi får

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(\zeta)| &= |u(e^{-ix\zeta})| = |u(\chi_\delta(x)e^{-ix\zeta})| \\
&\le C_N \sup \sum_{|\alpha|\le N} |D_x^\alpha(\chi_\delta(x)e^{-ix\zeta})| \\
&\le Ce^{(R+\delta)|\mathrm{Im}\zeta|} \sum_{|\beta|\le N} \delta^{-|\beta|}(1+|\zeta|)^{N-\beta}.
\end{aligned}$$

(3) följer om vi sätter $\delta = \frac{1}{1+|\zeta|}$.

(b) Den polynomiella tillväxten ger att $\hat{u}$ och därmed u ligger i $\mathscr{S}'$. Låt $\varphi_\delta \in \mathscr{S}$ vara en approximativ identitet och sätt $u_\delta = u * \varphi_\delta$. Då gäller $u_\delta \in C^\infty$, $u_\delta \to u$ då $\delta \to 0$, och

$$|\hat{u}_\delta(\zeta)| = |\hat{u}(\zeta)\hat{\varphi}(\delta\zeta)| \leq C_{M,\delta}(1+|\zeta|)^{-M} \exp((R+c\delta)|\mathrm{Im}\zeta|).$$

Vi har använt (3) och (1) i Proposition 1. Vi kan nu använda Proposition 1 på u_δ och får stöd $u_\delta \subset \{x; |x| \leq R + c\delta\}$. Detta ger, genom att låta $\delta \to 0$, stöd $u \subset \{x; |x| \leq R\}$. $\square$

Övning 13.1. Antag $u, v \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ och $u * v = 0$. Visa att då är $u = 0$ eller $v = 0$. Måste både u och v ha kompakt stöd?

Övning 13.2. H 7.1.40.

Kapitel 14

Existens av fundamentallösningar

Låt $P(D)$ vara en differentialoperator med konstanta koefficienter i $\mathbb{R}^n$. Vi skall visa att $P(D)$ har en fundamentallösning E.

Vi gör först en formell räkning. Genom att Fouriertransformera $P(D)E = \delta$, får vi $P(\xi)\widehat{E}(\xi) = 1$ och $\widehat{E}(\xi) = P(\xi)^{-1}$. Nu är

$$\langle E, \varphi \rangle = \langle E, \check{\check{\varphi}} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle E, \widehat{\check{\widehat{\varphi}}} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{E}, \check{\widehat{\varphi}} \rangle,$$

så det är naturligt att definiera E genom

$$\langle E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} P(\xi)^{-1} \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi.$$

Då gäller (formellt)

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E, \varphi \rangle &= \langle E, P(-D)\varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} P(\xi)^{-1} (P(-D)\varphi)\widehat{\ }(-\xi) d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} P(\xi)^{-1} P(\xi) \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Tyvärr fungerar inte detta alltid eftersom $P(\xi)$ kan vara 0. Vi skall därför "skjuta kontur" och definiera $\langle E, \varphi \rangle$ genom en integral över en mängd i $\mathbb{C}^n$ som inte går genom något nollställe till P.

Sats 14.1. *Varje linjär differentialoperator med konstanta koefficienter har en fundamentallösning $E \in \mathscr{D}'$.*

Bevis. Låt $m = \text{grad } P$. Efter ett linjärt koordinatbyte så kan P skrivas

$$\begin{aligned}
P(\xi) &= P_{\xi'}(\xi_n) = \xi_n^m + P_{m-1}(\xi')\xi_n^{m-1} + \ldots + P_0(\xi') \\
&= (\xi_n - \alpha_1(\xi')) \ldots (\xi_n - \alpha_m(\xi')).
\end{aligned}$$

Här är $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi', \xi_n)$ och $\alpha_i(\xi')$ är nollställena till $P_{\xi'}(\xi_n)$. Vi kan välja $\phi(\xi') \in \mathbb{R}$ så att $|\phi(\xi')| \le m+1$ och $|\phi(\xi') - \alpha_i(\xi')| \ge |\phi(\xi') - \mathrm{Im}\ \alpha_i(\xi')| \ge 1$ för $i = 1, 2, \dots, m$. Definiera nu $\langle E, \varphi \rangle$ för $\varphi \in \mathscr{D}$ genom

$$\langle E, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int_{\mathrm{Im}\, \zeta_n = \phi(\xi')} P(\zeta)^{-1} \widehat{\varphi}(-\zeta) d\zeta_n.$$

Enligt Paley-Wieners sats så är $\widehat{\varphi}(\zeta)$ en hel analytisk funktion och

$$|\widehat{\varphi}(\zeta)| \le \frac{C}{(1 + |\zeta|)^N} \sum_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Vidare är $|P(\zeta)^{-1}| \le 1$, så om N är stort nog, får vi

$$|\langle E, \varphi \rangle| \le C \sum_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Så $E \in \mathscr{D}'$. Slutligen ser vi att

$$\begin{aligned}
\langle P(D)E, \varphi \rangle &= \langle E, P(-D)\varphi \rangle \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int_{\mathrm{Im}\, \zeta_n = \phi(\xi')} P(\zeta)^{-1} (P(-D)\varphi)^\wedge(-\zeta) d\zeta_n \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int_{\mathrm{Im}\, \zeta_n = \phi(\xi')} \widehat{\varphi}(-\zeta) d\zeta_n \\
&= \text{Cauchys sats} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\xi' \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi_n \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

□

Övning 14.1. Bestäm en fundamentallösning till Schrödingerekvationen

$$(D_t - \sum_1^n D_{x_i}^2)E = \delta.$$

$(D = -i\partial)$
Ledning. Se Övning 10.14 och ledningen till Övning 12.7

Kapitel 15

Fundamentallösningar till elliptiska differentialoperatorer

Låt $P(D)$ vara en differentialoperator med konstanta koefficienter. Polynomet P kan skrivas

$$P = P_m + P_{m-1} + \ldots + P_0,$$

där P_k är ett polynom som är homogent av grad k. Vi säger att $P(D)$ är *elliptisk* om $P_m(\xi) \neq 0$ då $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Exempel 15.1. Δ och $\bar{\partial}$ är elliptiska. Värmelednings och vågoperatorerna är inte elliptiska. $\Box$

Sats 15.1. *Om $P(D)$ är en elliptisk differentialoperator så finns en distribution $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ med* $\operatorname{sing\,stöd} E = \{0\}$ *och $P(D)E = \delta - \omega$, för något $\omega \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Korollarium 15.2. *Om P är elliptisk så är P hypoelliptisk.*

Bevis av korollariet. Vi skall visa att u är C^∞ om $P(D)u$ är det. Om u har kompakt stöd så är $u = \delta * u = (P(D)E + \omega) * u = E * P(D)u + \omega * u \in C^\infty$. Det allmänna fallet följer genom att betrakta $\psi_n u$ där $\psi_n \in C_0^\infty$ och $\psi_n = 1$ på $\{|x| \leq n\}$ (jämför Sats 9.6) $\Box$

Bevis av satsen. Att P är elliptisk medför att $|P_m(\xi)| \geq \delta > 0$ då $|\xi| = 1$. Homogeniteten ger därför

$$|P_m(\xi)| \geq \delta |\xi|^m.$$

Så om $|\xi| > R$ och R är tillräckligt stort gäller därför

$$|P(\xi)| \geq c|\xi|^m.$$

Tag $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ med $\chi(\xi) = 1$ då $|\xi| \leq R$. Då är $(1-\chi)P^{-1}$ begränsad och alltså en tempererad distribution. Så vi kan definierar $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ genom

$$\widehat{E} = \frac{1-\chi}{P}.$$

Då är

$$(P(D)E)^\wedge = P\widehat{E} = P\frac{1-\chi}{P} = 1-\chi = \widehat{\delta} - \chi.$$

Om vi definierar ω genom $\widehat{\omega} = \chi$, så är $\omega \in \widehat{\mathscr{D}} \subset \mathscr{S}$ och $P(D)E = \delta - \omega$. Det återstår att visa att $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Observera att

$$(x^\beta D^\alpha E)^\wedge(\xi) = cD^\beta(\xi^\alpha \frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}) = O(|\xi|^{-|\beta|-m+|\alpha|}), \quad |\xi| \to \infty.$$

Om vi tar $|\beta|$ tillräckligt stort ser vi att $(x^\beta D^\alpha E)^\wedge \in L^1$ så $x^\beta D^\alpha E \in C$. Så $D^\alpha E \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, och vi är klara. $\square$

Kapitel 16

Fourierserier

Låt u vara en distribution som är periodisk med period 2π i varje variabel, dvs.

$$\langle u, \tau_{2\pi k}\varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle,$$

om $k \in \mathbb{Z}^n$. Intuitivt är u bestämd av sina ”värden” på

$$T = \{x; 0 \leq x_i < 2\pi\}.$$

Lemma 16.1. *Om u är periodisk så $u \in \mathscr{S}'$.*

Bevis. Låt $\psi \in C_0^\infty$ med $0 \leq \psi \leq 1$ och $\psi = 1$ på T. Sätt

$$\widetilde{\psi}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(x - 2\pi k).$$

Då är $\widetilde{\psi}$ en periodisk C^∞-funktion med $\widetilde{\psi} \geq 1$. Så $\phi = \psi/\widetilde{\psi} \in C_0^\infty$ och

$$\sum_k \phi(x - 2\pi k) = 1.$$

Låt nu $\varphi \in \mathscr{D}$. Då är

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi\rangle &= \langle u_x, \sum_k \phi(x - 2\pi k)\varphi(x)\rangle = \text{ändl. summa} = \\ &= \sum_k \langle u_x, \phi(x - 2\pi k)\varphi(x)\rangle = \text{periodicitet} = \\ &= \sum_k \langle u_x, \phi(x)\varphi(x + 2\pi k)\rangle = \langle u_x, \phi(x)\sum_k \varphi(x + 2\pi k)\rangle.\end{aligned}$$

Men om $\varphi_j \to 0$ i $\mathscr{S}$ så $\phi(x)\sum_k \varphi_j(x+2\pi k) \to 0$ i $\mathscr{D}$ (Visa det!) Så högerledet definierar en utvidgning av u till $\mathscr{S}'$. $\square$

För att beräkna $\widehat{u}$ visar vi först

Sats 16.2 (Poissons summationsformel)**.** *Om* $\varphi \in \mathscr{S}$ *så är*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(2\pi k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(k).$$

Bevis. Låt $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \delta_{2\pi k}$. Då gäller $\delta_{2\pi l} * u = u$ ty $\delta_{2\pi l} * \delta_{2\pi k} = \delta_{2\pi(k+l)}$. (Visa det!)
Så

$$(e^{-2\pi i l\xi} - 1)\widehat{u} = 0.$$

Men $e^{-2\pi i l\xi} - 1 \neq 0$ om $\xi \notin \mathbb{Z}^n$, så $\widehat{u}$ har stöd på $\mathbb{Z}^n$. Genom att välja olika l ser vi att nära origo gäller $\xi_i\widehat{u} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Så $\widehat{u} = c\delta_0$ där. Vidare är $e^{-ikx}u = u$, så $\widehat{u}$ är invariant under heltalstranslation. Vi får

$$\widehat{u} = c\sum_{k\in\mathbb{Z}^N} \delta_k.$$

Detta betyder att

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(2\pi k) = c\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(k).$$

Om vi ersätter φ med en translation av φ får vi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(2\pi k)e^{2\pi ikx} = c\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi(k+x).$$

Integration över $\{x; 0 \leq x_i < 1\}$ ger

$$\widehat{\varphi}(0) = c\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = c\widehat{\varphi}(0)$$

och beviset är klart. $\square$

Låt oss nu återvända till beräkningen av $\widehat{u}$ då u är periodisk. Om vi använder Poissons summationsformel på $\varphi(y) = \psi(y)e^{-ixy}$ får vi eftersom $\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\psi}(x+\xi)$,

$$\sum_k \widehat{\psi}(x+2\pi k) = \sum_k \widehat{\varphi}(2\pi k) = \sum_k \varphi(k) = \sum_k e^{-ixk}\psi(k).$$

Från beviset av Lemma 1 har vi

$$\begin{aligned}\langle \widehat{u}, \psi\rangle = \langle u, \widehat{\psi}\rangle &= \langle u, \phi(x)\sum_k \widehat{\psi}(x+k)\rangle \\ &= \langle u, \phi(x)\sum_k e^{-ixk}\psi(k)\rangle \\ &= \sum_k \psi(k)\langle u, \phi(x)e^{-ixk}\rangle.\end{aligned}$$

Alltså är $\widehat{u} = \sum_k c_k \delta_k$ där

$$c_k = \langle u, \phi(x)e^{-ixk} \rangle.$$

Om speciellt u är en funktion som är integrerbar på T, så är

$$\begin{aligned}
c_k = \langle u, \phi(x)e^{-ixk} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\phi(x)e^{-ixk} dx \\
&= \sum_j \int_T u(x - 2\pi j)\phi(x - 2\pi j)e^{-i(x-2\pi j)k} dx \\
&= \int_T u(x)e^{-ixk} \sum_j \phi(x - 2\pi j) dx = \int_T u(x)e^{-ixk} dx.
\end{aligned}$$

Så c_k är ”våra gamla” Fourierkoefficienter. Inversionssatsen ger

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_k c_k e^{ikx} \quad \text{i} \quad \mathscr{S}'.$$

Om $u \in C^l$ så är $c_k = O(|k|^{-l})$, $|k| \to \infty$, så summan är likformigt konvergent om $l > n$ och vi har bevisat

Sats 16.3. *Om $u \in C^l(\mathbb{R}^n)$, $l > n$, och u är periodisk med period 2π i varje variabel så är*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_k c_k e^{ixk},$$

och serien konvergerar likformigt.

Vi avslutar detta kapitel med att bevisa

Sats 16.4 (Plancherels sats)**.** *Om $u \in L^2(T)$ så*

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum c_k e^{ixk} \ \ i \ L^2,$$

och

$$\int_T |u|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum |c_k|^2.$$

Omvänt om $\sum |c_k|^2 < \infty$ så är $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_k c_k e^{ixk}$ en funktion i $L^2(T)$ med Fourierkoefficienterna c_k.

Bevis. Om $u \in C^{n+1}$, så konvergerar serien likformigt. Vi får

$$\int_T |u|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k,l} c_k \bar{c}_l \int_T e^{ix(k-l)} dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum |c_k|^2.$$

Eftersom C^{n+1} är tätt i L^2, kan vi utvidga detta till $u \in L^2$. Tag $u_n \in C^{n+1}, u_n \to u$ i L^2. Då gäller också $u_n \to u$ i $\mathscr{S}'$ och $\widehat{u}_n \to \widehat{u}$ i $\mathscr{S}'$. Men på grund av isometrin är $\widehat{u}_n$ en Cauchyföljd i l^2. Så $\widehat{u}_n \to \widehat{u}$ i l^2. Alltså

$$\int_T |u|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int_T |u_n|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_k |c_k(u_n)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum |c_k|^2.$$

Omvänt om $\sum |c_k|^2 < \infty$ låt

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_k c_k e^{ixk} \text{ och } u_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|k|\le N} c_k e^{ixk}.$$

Då gäller $u_N \to u$ i L^2 och $\mathscr{S}'$ så

$$\widehat{u} = \lim_{N\to\infty} \widehat{u}_N = \sum c_k \delta_k.$$

□

Anmärkning 16.5. Om u är en funktion med perioden t så har $u_t(x) = u(\frac{2\pi x}{t})$ perioden 2π och vi kan på så sätt generalisera Fourierserier till funktioner med godtycklig period. □

Övning 16.1. H 7.2.1

Övning 16.2. H 7.2.5

Övning 16.3. H 7.2.8

Övning 16.4. Beräkna a) $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ b) $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}$ och c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Kapitel 17

Några tillämpnigar

17.1 Centrala gränsvärdessatsen

Låt $X, X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende likafördelade stokastiska variabler med $E[X] = m$ och $Var[X] = \sigma^2$. Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \qquad (17.1)$$

Lite bakgrund: Till en stokastisk variabel X är associerat ett sannolikhetsmått μ på $\mathbb{R}$ (vi skriver $X \sim \mu$) genom

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} d\mu(y).$$

Om μ_1 och μ_2 är sannolikhetsmått, så definierar vi ett nytt sannolikhetsmått $\mu_1 * \mu_2$ genom

$$\langle \mu_1 * \mu_2, \varphi\rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y).$$

Då gäller $(\mu_1 * \mu_2)^\wedge = \widehat{\mu}_1 \widehat{\mu}_2$. (Visa det!) Om $X \sim \mu_1$ och $Y \sim \mu_2$ är oberoende, så är $X + Y \sim \mu_1 * \mu_2$.

Bevis. Vi kan anta att $m = 0$ och $\sigma = 1$. Låt

$$S_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$$

och

$$\mu^{n*} = \underbrace{\mu * \ldots * \mu}_{n \text{ gånger}}.$$

Då är $S_n \sim \mu_n$, där

$$\langle \mu_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) d\mu^{n*}(x),$$

och

$$\widehat{\mu_n}(\xi) = \left(\widehat{\mu}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

Eftersom $\mathrm{Var}[X] < \infty$, så är

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} d\mu(x)$$

en C^2-funktion med

$$\widehat{\mu}\,'(0) = -im = 0 \quad \text{och} \quad \widehat{\mu}\,''(0) = -\sigma^2 = -1.$$

Så

$$\widehat{\mu}(\xi) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 + o(\xi^2), \quad \xi \to 0,$$

och

$$\widehat{\mu_n}(\xi) = \left(\widehat{\mu}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n}\xi^2 + o\left(\frac{\xi^2}{n}\right)\right)^n \to e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad n \to \infty,$$

för varje fixt ξ. Men eftersom $|\widehat{\mu}(\xi)| \leq 1$ ger dominerad konvergens att

$$\widehat{\mu_n}(\xi) \to e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad \text{i} \quad \mathscr{S}'.$$

Med Fourierinversion får vi

$$\mu_n \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

i $\mathscr{S}'$ och alltså i $\mathscr{D}'$. Men μ_n är positiva mått och enligt Sats 7.4

$$\mu_n \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

svagt, och detta ger (1). $\square$

17.2 Medelvärdesegenskapen för harmoniska funktioner

Om $u \in C^\infty$ är harmonisk i en omgivning av $\{|x| \leq 1\}$, så gäller

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S^{n-1}} u(y) d\sigma y).$$

Anmärkning 17.1. Weyls lemma visar att antagandet att $u \in C^\infty$ är onödigt. □

Bevis. Definiera en distribution Λ genom

$$\langle \Lambda, \varphi \rangle = \int_{S^{n-1}} \varphi(y) d\sigma(y) - \omega_n \varphi(0).$$

$\Lambda \in \mathscr{E}'$, så $\widehat{\Lambda}$ är en hel funktion. Vidare är Λ, och därmed även $\widehat{\Lambda}$, radiell. Så $\widehat{\Lambda}(\zeta) = G(|\zeta|)$, där $G(t) = \widehat{\Lambda}(t, 0, \dots, 0)$ är holomorf. Vidare är G jämn, så $G(z) = F(z^2)$ för någon hel funktion F. Dessutom är $F(0) = \widehat{\Lambda}(0) = \Lambda(1) = 0$. Därför är

$$\frac{\widehat{\Lambda}(\xi)}{|\xi|^2} = \frac{F(|\xi|^2) - F(0)}{|\xi|^2}$$

restriktionen av en hel funktion. Enligt Paley-Wieners sats finns därför en distribution $\mu \in \mathscr{E}'$ med $\widehat{\mu}(\xi) = -F(|\xi|^2)/|\xi|^2$ och alltså

$$(\Delta\mu)\widehat{\ }(\xi) = -|\xi|^2 \widehat{\mu}(\xi) = \widehat{\Lambda}(\xi).$$

Alltså är $\Delta\mu = \Lambda$. Detta ger

$$\langle \Lambda, u \rangle = \langle \Delta\mu, u \rangle = \langle \mu, \Delta u \rangle = \langle \mu, 0 \rangle = 0.$$

□

17.3 Heisenbergs osäkerhetsrelation

Om $f \in L^2(\mathbb{R})$ så gäller

$$\|xf(x)\|_2 \|\xi \widehat{f}(\xi)\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|f\|_2^2, \tag{17.2}$$

med likhet endast för $f(x) = \exp(-kx^2)$, $k > 0$.

Kvantmekanisk bakgrund: Tillståndet hos en partikel är en funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ med $\|\psi\|_2 = 1$. Vi tolkar

$$\int_E |\psi|^2$$

som sannolikheten att partikeln befinner sig i mängden E. En observerbar storhet A är en symmetrisk operator på ett lämpligt delrum av L^2. Medelvärdet av A i tillståndet ψ är

$$E[A] = \int A\psi \cdot \bar{\psi} = \langle A\psi, \psi \rangle.$$

Att A är symmetrisk betyder att $A = A^*$ och alltså gäller

$$\langle A\psi, \psi \rangle = \langle \psi, A^*\psi \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle = \overline{\langle A\psi, \psi \rangle},$$

så medelvärdet är reellt.

Exempel 17.2.
a) Läge. $A\psi(x) = x\psi(x)$
b) Moment. $B\psi = 2\pi i\psi'$. □

Vi har

$$E[B] = \int B\psi \cdot \bar{\psi} = 2\pi i \int \psi'\bar{\psi} = \text{Plancherel} = \int \xi\widehat{\psi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)} = \int \xi|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Så vi kan tolka $|\widehat{\psi}(\xi)|^2$ som tätheten för momentet.

Den allmänna formeln av Heisenbergs osäkerhetsrelation är

$$E[(A - E[A])^2]E[(B - E[B])^2] \geq \frac{1}{4}\big|E[AB - BA]\big|^2 \tag{17.3}$$

för godtyckliga A och B.

Övning 17.1. Visa att om A och B är läge och moment så gäller $AB - BA = -2\pi i$.
Övning 17.2. Visa att (2) medför (3), då A och B är läge och moment.

Bevis. Om $f \in \mathscr{S}$ gäller

$$\begin{aligned}
&\|xf(x)\|_2\|\xi\widehat{f}(\xi)\|_2 = \|xf(x)\|_2\|\widehat{f'}(\xi)\|_2 = \text{Parseval} = \\
&= \sqrt{2\pi}\|xf(x)\|_2\|f'(x)\|_2 \geq \text{Schwartz} \geq \sqrt{2\pi}\int |x\overline{f(x)}f'(x)|dx \\
&\geq (|x\bar{z}w| \geq x \text{ Re } \bar{z}w) \geq \sqrt{2\pi}\int x\frac{1}{2}\left(\overline{f(x)}f'(x) + f(x)\overline{f'(x)}\right) dx \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int x(|f(x)|^2)'dx = \text{Partiell integration} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int |f|^2dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Beviset för att satsen gäller också för funktioner i L^2, och utredningen av när likhet gäller lämnas åt läsaren. $\square$

17.4 Något om Sobolevolikheter

En fördel med distributionsteori är att vi kan hitta lösningar till problem som inte har några klassiska lösningar. Men ofta vill man att lösningarna skall vara funktioner. Det är därför naturligt att ställa frågan
När är en distributionslösning en klassisk funktionslösning?
Sobolevteori ger oss metod för att besvara den frågan. Vi börjar med den enklaste satsen i Sobolevteorin,

Sobolevs L^1-olikhet *Låt f vara en integrerbar funktion på $\mathbb{R}^n$. Antag att distributionsderivatorna $\partial^\alpha f$ också är integrerbara för alla $|\alpha| \leq n$. Då är f en begränsad kontinuerlig funktion och*

$$\|f\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|\leq n} \|\partial^\alpha f\|_1 \ . \tag{17.4}$$

Om dessutom $\partial^\alpha f$ är integrerbara för alla $|\alpha| \leq n+k$ så är f en C^k-funktion.

Bevis. Vi börjar med fallet $n = 1$ och skall alltså visa att

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_1 + \|f'\|_1 \ . \tag{17.5}$$

Om $\varphi \in C_0^\infty$ så gäller

$$|\varphi(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x} \varphi'(t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{x} |\varphi'(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(t)|dt \ .$$

Detta ger

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi'\|_1 \ . \tag{17.6}$$

Denna olikhet är skarpare än olikheten (5), men vi har bevisat den under två starka extra villkor, C^∞ och kompakt stöd. (Funktionen 1 visar att (6) inte kan vara sann i allmänhet.)

Om $f \in C^\infty$ inte har kompakt stöd väljer vi en följd av avhuggningsfunktioner $\chi_n \in C^\infty$, $\chi_n = 1$ då $|x| \leq n$ och med $\|\chi_n'\|_\infty \leq 1$. Applicerar vi (6) på $\varphi = \chi_n f$ får vi

$$\|\chi_n f\|_\infty \leq \|(\chi_n f)'\|_1 \leq \|\chi_n' f\|_1 + \|\chi_n f'\|_1 \leq \|f\|_1 + \|f'\|_1 \ .$$

Eftersom n är godtyckligt följer (5) för C^∞-funktioner.

Om f inte är C^∞ låter vi ϕ_δ vara en approximativ identitet. Då är $f_\delta = \phi_\delta * f \in C^\infty$ och vi kan använda (5) på f_δ. Vi får, eftersom $\|\phi_\delta * f\|_1 \le \|f\|_1$ och $\|(\phi_\delta * f)'\|_1 = \|\phi_\delta * f'\|_1 \le \|f'\|_1$, att

$$\|\phi_\delta * f\|_\infty \le \|f\|_1 + \|f'\|_1 \ .$$

Men $\phi_\delta * f \to f$ n.ö. och (5) följer i det allmänna fallet.

Till sist använder vi (5) på $f - f_\delta$ och får

$$\|f - f_\delta\|_\infty \le \|f - \phi_\delta * f\|_1 + \|f' - \phi_\delta * f'\|_1 \to 0, \delta \to 0 \ .$$

Så $f_\delta \to f$ likformigt och alltså är f en kontinuerlig funktion.

Det sista påståendet i satsen följer om vi använder vårt argument på funktionerna $\partial^i f$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Argumentet i högre dimensioner är snarlikt. Fallet $n = 2$ visar hur det går till utan att notationen blir för krånglig. Nu gäller för $\varphi \in C_0^\infty$ att

$$|\varphi(x,y)| = \left| \int_\infty^x \int_\infty^y \partial^{(1,1)}\varphi(s,t)dsdt \right| \le \int_\infty^\infty \int_\infty^\infty |\partial^{(1,1)}\varphi(s,t)|dsdt$$

och alltså

$$\|\varphi\|_\infty \le \|\partial^{(1,1)}\varphi\|_1 \ .$$

När vi använder detta på $\chi_n f$, $f \in C^\infty$, får vi eftersom $\partial^{(1,1)}(\chi_n f) = \partial^{(1,1)}\chi_n f + \partial^{(1,0)}\chi_n \partial^{0,1} f + \partial^{(0,1)}\chi_n \partial^{1,0} f + \chi_n \partial^{(1,1)} f$, att

$$\|f\|_\infty \le \|f\|_1 + \|\partial^{1,0} f\|_1 + \|\partial^{0,1} f\|_1 + \|\partial^{(1,1)} f\|_1, \ f \in C^\infty \ .$$

Resten av argumentet fungerar likadant som i fallet $n = 1$.

$\square$

Anmärkning 17.3. Beviset visar att det räcker att i (4) summera över $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ där varje α_i bara antar värdena 0 eller 1. $\square$

Sobolevs L^2-olikhet

Låt $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ där Ω är en öppen mängd i $\mathbb{R}^n$ och låt och r och k vara heltal, $k \ge 0$. Om $\partial^\alpha f \in L^2_{\text{lok}}$ för alla α, $0 \le |\alpha| \le r$ där $r > k + \frac{n}{2}$, så gäller $f \in C^k(\Omega)$.

Bevis då n=1 och $k = 0$.

Vi vet alltså att $f \in L^2_{\text{lok}}$ och $f' \in L^2_{\text{lok}}$. Låt ω vara öppen, $\omega \subset\subset \Omega$ och tag $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ med $\|\chi\|_\infty \le 1$, $\|\chi'\|_\infty \le 1$ och $\chi = 1$ i en omgivning av ω.

Definiera $F(x) = F_\omega(x) = \chi(x)f(x)$. ($F = 0$ utanför stödet till χ.) Eftersom $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ och $F' = \chi' f + \chi f' \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ger Parsevals identitet att

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{F}|^2 d\xi < \infty \quad \text{och} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \xi^2 |\widehat{F}|^2 d\xi < \infty$$

och alltså

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^2 |\widehat{F}|^2 d\xi < \infty \, .$$

Cauchy-Schwartz olikhet ger

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{F}| d\xi \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)|\widehat{F}| \frac{d\xi}{1+|\xi|} \right)^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^2 |\widehat{F}|^2 d\xi \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^2} < \infty \, . \end{aligned}$$

Alltså är $\widehat{F}$ integrerbar och F kontinuerlig. Eftersom ω är en godtycklig öppen delmängd av Ω följer att $f \in C(\Omega)$.

$\square$

Det allmänna fallet. Om $n = 1$ och $k = 1$ vet vi dessutom att $F'' \in L^2$ och alltså är $\xi^2 \widehat{F}(\xi) \in L^2$. Så nu gäller $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^4 |\widehat{F}|^2 d\xi < \infty$. Cauchys olikhet ger $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)|\widehat{F}| d\xi < \infty$, så speciellt är $\xi \widehat{F}(\xi)$ integrerbar och F' är kontinuerlig. Påståendet för ett godtyckligt k följer på samma sätt.

Om $n > 1$ ger villkoret på $\partial^\alpha f$ att $\xi_i^l \widehat{F}(\xi) \in L^2$, $l \leq r$. Med hjälp av olikheten $(1+|\xi|)^{2l} \leq C_l(1 + \xi_1^{2l} + \ldots + \xi_n^{2l})$ och Cauchys olikhet ger detta att $(1+|\xi|)^k \widehat{F} \in L^1$ och alltså $F \in C^k$.

$\square$

Sobolevrum

Låt oss abstrahera idéerna i beviset av L^2-olikheten. Vi såg att om f och dess derivator t.o.m. ordning r ligger i L^2 så gäller $(1+|\xi|)^r \widehat{f} \in L^2$ eller ekvivalent $(1+|\xi|^2)^{r/2} \widehat{f} \in L^2$. I detta villkor kan vi låta r vara ett reellt tal och göra följande definition.

Definition 17.4. En distribution $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ligger i *Sobolevrummet* $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, om

$$\|f\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi)\|_{L^2} < +\infty$$

Proposition 17.5. *Om $f \in H^r(\mathbb{R}^n)$ där $r > s + \frac{n}{2}$ så gäller $(1+|\xi|)^s \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Anmärkning 17.6. Om $s = k$ är ett icke-negativt heltal så ger detta att $f \in C^k$.

Bevis. Vi har $(1+|\xi|^2)^{r/2}\widehat{f}(\xi) \in L^2$. Så Cauchys olikhet ger

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} &(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{r/2}\widehat{f}(\xi)\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{(r-s)/2}} \leq C\|f\|_{H^r} ,\end{aligned}$$

eftersom $(1+|\xi|^2)^{-(s-r)}$ är integrerbar när $r - s > \frac{n}{2}$. □

17.5 Minkowskis sats

Låt B vara en konvex mängd som är symmetrisk kring origo. Om $|B| \geq 2^n$, så innehåller B mer än en gitterpunkt.

Bevis. Vi antar att 0 är den enda gitterpunkten i B, och skall visa att då är $|B| < 2^n$. Låt $f = \chi_B * \chi_B$. Eftersom B är symmetrisk är $\widehat{\chi}_B$ reell. Alltså är $\widehat{f} = (\widehat{\chi}_B)^2 = |\widehat{\chi}_B|^2$.

Vi observerar att om $f(2i) \neq 0$, dvs.

$$f(2i) = \int \chi_B(2i - x)\chi_B(x)dx \neq 0 ,$$

så finns ett $x \in B$ med $2i - x \in B$. Men då är $i = \frac{1}{2}(2i - x) + \frac{1}{2}x \in B$, eftersom B är konvex. Alltså om $f(2i) \neq 0$ så är $i = 0$. Vidare är

$$f(0) = \int \chi_B(-x)\chi_B(x)dx = \int |\chi_B|^2 dx = |B|.$$

Poissons summationsformel på gittren $(2\mathbb{Z})^n$ och $(\pi\mathbb{Z})^n$ blir

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} f(2j) = 2^{-n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(\pi j) .$$

Detta ger

$$\begin{aligned}|B| = f(0) &= \sum_j f(2j) = 2^{-n}\sum_j \widehat{f}(\pi j) \\ &= 2^{-n}\sum_j |\widehat{\chi}_B(\pi j)|^2 = 2^{-n}\left(|B|^2 + \sum_{j\neq 0}|\widehat{\chi}_B(\pi j)|^2\right)\end{aligned}$$

Om vi kan visa att

$$\sum_{j \neq 0} \left|\widehat{\chi}_B\left(\pi j\right)\right|^2 > 0,$$

så får vi $|B| > 2^{-n}|B|^2$, eller $|B| < 2^n$, och vi är klara.

Men om $\widehat{\chi}_B(\pi j) = 0$ då $j \neq 0$, så är

$$\chi(x) = \sum_j \chi_B(x + 2j)$$

konstant. Detta följer från Poissons summationsformel eftersom

$$\chi(x) = \sum_j \tau_{-x}\chi_B(2j) = 2^{-n} \sum_j e^{i\pi xj}\widehat{\chi}_B(\pi j) = 2^{-n}\widehat{\chi}_B(0).$$

Men detta är en motsägelse, ty

$$\chi(0) = 1 \neq 0 = \chi(1, 0, \ldots, 0).$$

□

Övning 17.3. Beviset är ”fel”. Varför? Rätta till det!

Sakregister