TMA 055 : Diskret Matematik

Inlämningsuppgift 1

Följande allmäna regler gäller för alla inlämningsuppgifterna (se också Kurs PM:et) :

1. Motivera (bevisa) alla svar.
2. Uppge vilka du samarbetet med.
3. Spara uppgifterna (med kommentarer) när du får tillbaka dem.

Uppvärmning

1. Ett gäng av 8 killar går ut någon fredagkväll och träffar ett gäng av 6 tjejer. På hur många sätt kan de paras ihop så att bara ett par består av två olyckliga killar ?

2. Hur många vägar av minimal längd, längs kanter, finns det från origon till punkten $(1, 1, ..., 1)$ i enhetskuben ?

3. När matematikern Gauβ var 9 år gammal så satt han uttråkad i skolan en dag och bevisade följande nuförtiden välkända formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

I dagens skolor brukar man ofta bevisa denna formel med induktion på n - gör det ! Men Gauβ hade ett annat bevis - har du ?

4. Låt S vara en ändlig mängd. Bevisa *kombinatoriskt* att antalet delmängder till S som har ett jämnt antal element är lika med antalet delmängder som har ett udda antal element.

(OBS! På föreläsningen bevisade vi detta m.h.a binomialsatsen. Med ett 'kombinatoriskt' bevis menar jag att du skall beskriva en explicit 1-1 korrespondens mellan de 'jämna' och de 'udda' delmängderna.)

5 (a). Världens bästa klubbfotbollslag, Liverpool FC (!!!), hade i fjol (jag har inte hängt med alla förändringarna under sommaren !) en trupp bestående av 22 spelare : 3 målvakter, 6 försvarare, 9 mittfältare och 4 anfallare. Deras tränare föredrar spelsystemet 4-4-2, dvs målvakt + 4 försvarare + 4 mittfältare + 2 anfallare. Hur många olika laguppställningar har han då att välja ifrån, när alla spelarna är friska, om inbördesordningen i varje lagdel är (i) väsentlig (ii) oväsentlig.

(b) Världens sämsta klubblag, IFK Göteborg ...... nej, vi går vidare :-)

Att lämna in torsdag den 12 september

ANMÄRKNING : I några uppgifter måste du få fram en formel $f(n)$ =mm. Om du har problem med detta prova med att räkna ut $f(1), f(2), f(3), ...$ och försöka gissa rätt formel. Om dina gissningar inte ledar någonstans, då är följande tillåtet : gå till webb-sidan

http://www.research.att.com/∼njas/sequences

och skriv in följden $f(1), f(2), f(3), ...$ Du kommer förhoppningsvis att få tillbaka den rätta formeln. Men du måste fortfarande BEVISA att formeln stämmer !

1. En ORDNAD trippel (a, b, c) av heltal sägs vara en *aritmetisk följd* (AF) om $b - a = c - b$. Ange en formel för antalet AF:er som består av tal från $\{1, 2, ..., n\}$.

2. Ange och bevisa en väldigt enkel formel för

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$$

OBS! Du får fler poäng om ditt bevis inte använder formeln för $\binom{n}{k}$.

3. Mer fotboll ! På VM deltar 32 länder. Till gruppspelet skulle lagen lottas i 8 grupper med 4 lag i varje. Antag att lottningen sker fritt. På hur många olika sätt kan lagen lottas (inbordesordningen i varje grupp är ovasentlig, men inte ordningen av grupperna själva) ?

(ANMÄRKNING : I det riktiga VM:et sker lottningen inte fritt. Det finns villkor som gör det väldigt svårt att räkna ut antalet möjligheter ... försök om du vill !)

4. Låt $n \geq k \geq i$ vara tre positiva heltal. Bevisa *kombinatoriskt* att

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}. \tag{1}$$

OBS! Med ett 'kombinatoriskt' bevis, menar jag att du ska undvika att använda formeln för binomialkoefficienterna. I stället ska du visa att båda sidorna av (1) räknar samma saker, men på två olika sätt. Frågan är vad dessa saker är !

5. Låt q_n vara antalet ord av längd n i alfabetet $\{a, b, c, d\}$ som innehåller ett udda antal b:s. Bevisa att

$$q_{n+1} = 4^n + 2q_n.$$

(Ledning : Dela upp orden av längd $n+1$ m.a.p. om de börjar med ett b eller inte (idéen är analog med beviset av Pascals identitet)).

6. En samling $\mathcal{S}$ av delmängder till $\{1, ..., n\}$ sägs vara *intersecting* om

$$A \cap B \neq \phi$$

för varje par av delmängder från $\mathcal{S}$. Ange (med bevis) den maximala *storleken* av en sådan samling, dvs det maximala antalet mängder i en sådan samling.

Bonusproblem (inget samarbete)

Placera n punkter på en cirkel och dra kordan mellan varje par av punkter. Antag att punkterna är *genersikt placerade*, dvs att inga tre kordor skärs i samma punkt. Bestäm antalet områden inuti cirkeln (ge en enkel formel och bevisa den kombinatoriskt).

Tips : Kolla de första fallen och formulera en gissning. Den var säkert felaktig. Kolla ett par fall till och fösök skriva resultatet som en elegant summa av binomialkoefficienter. Om du känner dig osäkert, visa resultatet med induktion (men du får fler poäng för det kombinatoriska beviset !)

Ytterligare övningar

Se inlämningsuppgifterna från föregående år. Det finns länkar från kurshemsidan.