1 Lektion 1 : skiss lösningar

6.8 Integranden är separabel, så integralen blir

$$\left(\int_{-1}^{1} xe^x dx\right) \times \left(\int_{-1}^{1} ye^y dy\right) = \left(\int_{-1}^{1} xe^x dx\right)^2 = (2/e)^2 \tag{1}$$

efter partiell integration ($\int ue^u du = e^u(u-1)$).

6.2 Integranden är symmetrisk i x och y så spelar det ingen roll i vilken ordning vi gör den. Vi väljer att integrera m.a.p. y först och skriver integralen som

$$\int_0^1 dx \left(\int_0^2 \frac{dy}{1+x+y}\right). \tag{2}$$

Den y-integralen är $\ln(1+x+y)|_0^2 = \ln(x+3) - \ln(x+1)$.

Nästa vi beräknar vi den x-integralen med hjälp av formulen $\int \ln u \, du = u(\ln u - 1)$. Denna fås via partiell integration.

Svar : $\ln(64/27)$.

6.4 Det är mycket lättare att göra den x-integralen först. Så skriv integralen som

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \; y \left(\int_0^1 \sin(yx+y)dx\right). \tag{3}$$

Efter en lätt beräkning av x-integralen (3) blir $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos y - \cos 2y)dy = (\sin y - \frac{1}{2}\sin 2y)|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$.

6.5 Notera att man MÅSTE göra den x-integralen först.

6.7 Integranden är symmetrisk i x och y, alltså spelar ordningen ingen roll. Försök lösa dig själv. Du kommer att behöva beräkna med formulen

$$\int_\alpha^\beta (1+au)e^{au} du = \beta e^{\beta a} - \alpha e^{\alpha a}. \tag{4}$$

För att skaffa (4) behöver du formulen från **6.1.8** ovan.

6.9 Följ tipset. Problemet reducerar till att beräkna de två integralerna $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ och $\int_0^\pi x \cos x \, dx$. Dessa är lika med π och -2 resp. (partiell integration ger $\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x$ och en liknande formul för $\int x \cos x \, dx$).

2 Lektion 2 : skiss lösningar

6.12 D är området mellan y-axeln, linjen $y = 1$ och kurvan $y = x^2$. Den dubbla-integralen kan skrivas som en av två itererade integraler, nämligen

$$\int_0^1 x\,dx \left(\int_{x^2}^1 \frac{dy}{1+y^2} \right) \quad \text{eller} \quad \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \left(\int_0^{\sqrt{y}} x\,dx \right). \tag{5}$$

Båda itererade integraler kan beräknas. M.a.p. den första, du beräknar den y-integral med hjälp av formulen $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u$ och då den x-integral med hjälp av $\int \tan^{-1} u\,du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$ (denna formul anges via partiell integration).

Alternativt, för den andra itererada integralen, den x-integralen är lätt och du beräknar den y-integral genom en variabel bytning $u := 1 + y^2$.

Svar : $\frac{1}{4}\ln 2$.

6.14 D är området mellan linjerna $y = 1$, $y = x$ och $y = -x$. Notera att D är symmetrisk kring y-axeln. Alltså, integralen kan skrivas som en av två itererade integraler

$$2\int_0^1 dx \left(\int_x^1 e^{-y^2} dy \right) \quad \text{eller} \quad 2\int_0^1 e^{-y^2} dy \left(\int_0^y dx \right). \tag{6}$$

Den första av dessa är olösbar, så vi måste välja den andra. Integralen är lätt : den y-delen görs via en variabel bytning $u := y^2$.

Svar : $1 - e^{-1}$.

6.16 D är den första kvadranten i den slutna enhetsskivan. De två alternativa itererade integralerna är

$$\int_0^1 x\,dx \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{(1+y^2)^2} dy \right) \quad \text{och} \quad \int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)^2} dy \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx \right). \tag{7}$$

Både integraler kan göras med elementära metoder. För den andra, beräkna y-integralen via den variabel bytningen $u := 1 + y^2$.

Svar : $\frac{1}{4}(1 - \ln 2)$.

Supplementära övningar

A. Låt S vara det solida området mellan planet $z = 1 + x + y$ och triangeln R i det xy-planet med vertices $(0,0), (1,0), (0,2)$. Beräkna volymen till S.

B. Ange mass av en tunn 'lamina' i det begränsada området mellan kurvorna $y = 2x^2$ och $y = 5x - 3$ vars täthet i punkten (x, y) är xy.

3 Lektion 3 : skiss lösningar

6.21 En vanlig bytning till polära koordinator $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ så att integralen blir

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} r\ln(1+r^2)\,dr\,d\theta = 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r\ln(1+r^2)\,dr. \tag{8}$$

Lös den r-integralen via substitutionen $u := 1 + r^2$.

Svar : $\pi(\ln(\frac{27}{4}) - 1)$.

6.22 Vi gör den inte, men notera att $y \geq |x|$ i definitionen av D betyder att θ går från $\frac{\pi}{4}$ till $\frac{3\pi}{4}$ när du byter till polära koordinator.

6.25 Kvadrat komplettering ger att $D = \{(x,y) : (x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 4^2\}$, dvs D är en skiva av radie 4 med centrum i $(1,-3)$. Alltså, den lämpliga koordinat transformationen är

$$x = 1 + r\cos\theta \qquad y = -3 + r\sin\theta \tag{9}$$

så att integralen blir

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 (1 + r\cos\theta)(-3 + r\sin\theta)r\,dr\,d\theta. \tag{10}$$

Expandera och beräkna en summa av integraler. Notera att de flesta θ-integralerna är lika med noll.

Svar : -48π.

6.29 Inför variablerna $u = x^2 - y^2$, $v = x^2 + y^2$. Beräkna

$$\left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| = \left|\begin{array}{cc} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{array}\right| = |8xy| = -8xy,$$

ty $x < 0$ och $y > 0$. Alltså, får du integralen

$$-\frac{1}{8}\int_{\sqrt{17}}^5\int_1^4 \frac{x^4 - y^4}{xy}\,du\,dv. \tag{11}$$

Som en funktion av u och v integranden är

$$\frac{x^4 - y^4}{xy} = \frac{-2uv}{\sqrt{v^2 - u^2}}. \tag{12}$$

Det spelar ingen roll i vilken ordning du gör integrationen. Till ex., om du integrerar m.a.p. v först, inför du substitutionen $w := v^2 - u^2$. Då får du kvar följande u-integral

$$\frac{1}{4}\left(\int_1^4 u\sqrt{25 - u^2}\, du - \int_1^4 u\sqrt{17 - u^2}\, du\right). \tag{13}$$

Beräkna dessa integraler med hjälp av substitutionen $w := a - u^2$ ($a = 25, 17$). Äntligen, simplificera svaret.

Svar : $\frac{1}{2}\left(8\sqrt{6} - 15\right)$.

6.31 Inför $u = x + 2y$ så att integralen blir

$$\int_1^2 \frac{1}{(1 + u^2)^2} A'(u)\, du, \tag{14}$$

där $A(u)$ är arean av det begränsade området mellan linjerna $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 1$ och $x + 2y = u$. Det är en lätt geometrisk övning att beräkna $A(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)$, så att $A'(u) = \frac{1}{2}u$.

Nu beräkna integralen (13) med hjälp av substitutionen $w := 1 + u^2$.

Svar : $\frac{3}{40}$.

4 Lektion 4 : skiss lösningar

7.1 Integranden är separabel och vi får

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z}\, dxdydz = \left(\int_0^1 e^x\, dx\right)\left(\int_0^1 e^y\, dy\right)\left(\int_0^1 e^z\, dz\right) = \left(\int_0^1 e^u\, du\right)^3 = (e-1)^3. \tag{15}$$

7.3 Vi får den itererade integralen

$$\int_0^1 \left[\int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx\right] dz = \int_0^1 dz \left(\int\int_{D_z} (x^2+y^2)\, dx\, dy\right), \tag{16}$$

där D_z är skivan $x^2+y^2 \leq z^2$. Vi byter till polära koordinator i planet och integralen över D_z blir $\int_0^{2\pi}\int_0^z r^3\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}z^4$.

Då beräknar vi äntligen $\int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}z^4\right) dz = \frac{\pi}{10}$.

7.4 I området D måste vi ha

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Alltså, får vi den itererade integralen

$$\int\int_{D_{\frac{1}{2}}} \frac{dx\, dy}{1+x^2+y^2}\left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\, dz\right] = \frac{1}{2}\int\int_{D_{\frac{1}{2}}} \frac{1-2(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy, \tag{18}$$

där $D_{\frac{1}{2}}$ är skivan $x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}$. Vi byter till polära koodinator och får integralen $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{r(1-2r^2)}{1+r^2}\, dr\, d\theta$. Vi beräknar den r-integralen med hjälp av substitutionen $u := 1+r^2$.

Svar : $\frac{\pi}{2}\left(3\ln(\frac{3}{2})-1\right)$.

7.6 Lösningen ges i boken, men vi löser problemet i alla fall för att illustrera metoden : integration med hjälp av nivåytor. Dvs, vi ska använda formulen

$$\int\int\int_D h(f(x,y,z))\, dx\, dy\, dz = \int_a^b h(t)V'(t)\, dt, \tag{19}$$

där D är ett (begränsad) område mellan nivåytorna $f(x,y,z) = a$ och $f(x,y,z) = b$, och $V(t)$ = volymen av delen av D mellan $f(x,y,z) = a$ och $f(x,y,z) = t$.

Svar : $\frac{1}{6}\ln 2$.

7.10 Vi byter till sfäriska koordinator. De sfäriska koordinatorna är

$$x = r\sin\phi\cos\theta \quad y = r\sin\phi\sin\theta \quad z = r\cos\phi. \tag{20}$$

Den Jacobi determinant för denna transformation är

$$\left|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\phi,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} x_r & x_\phi & x_\theta \\ y_r & y_\phi & y_\theta \\ z_r & z_\phi & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\phi. \tag{21}$$

Alltså, får vi den itererade sfäriska integralen

$$\int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (r\cos\phi) r^2 \sin\phi \, dr\, d\phi\, d\theta. \tag{22}$$

Integralen är separabel och lätt.

Svar : $\frac{\pi}{8}$.

7.16 Först, beräknar vi den Jacobi determinanten

$$\left|\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 27. \tag{23}$$

Då blir integralen

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{27}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{e^{-u^2}}{(1+v^2)(1+w^2)}\, du\, dv\, dw \\ &= \tfrac{1}{27}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{dv}{1+v^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{dw}{1+w^2}\right) = \tfrac{1}{27}\sqrt{\pi}\cdot\pi\cdot\pi = \tfrac{\pi^{\frac{5}{2}}}{27}. \end{aligned} \tag{24}$$

8.2 Notera att skärningen mellan ytorna är cirkeln $x^2+y^2 = z = 1$. Punkten $(0,0,1)$ ligger i inren av denna cirkel. Alltså, får vi den itererade integralen

$$\int\int_{D_1} dx\,dy \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\sqrt{2-r^2} - r^2)\, dr\, d\theta, \tag{25}$$

efter bytning till polära koordinator. Den sista integralen beräknas med hjälp av vanliga substitutioner. Simplificera svaret.

Svar : $\frac{\pi}{6}\left(8\sqrt{2} - 7\right)$.

8.6 Efter kvadrat komplettering ser vi att $x^2 + y^2 \leq 4x$ beskriver skivan av radie 2 med centrum i $(2,0)$. Låt denna skiva kallas för D. Nu har vi den itererade integralen

$$\int\int_D dx\,dy \left(\int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} dz \right) = 2 \int\int_D (x^2+y^2)\, dx\, dy. \tag{26}$$

Byta till koordinator $x - 2 = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ och får du integralen $2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r + 4r^2\cos\theta + r^3)\, dr\, d\theta$, som beräknas med vanliga metoder.

Svar : 48π.

8.12 Inleda de nya variablerna

$$u = \frac{x}{a} \quad v = \frac{y}{b} \quad w = \frac{z}{c}. \tag{27}$$

Beräkna

$$\left| \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}. \tag{28}$$

Alltså, ellipsoidens volym är $abc \times$ volym av enhetsklotet. Vi vet redan att enhetsklotet har volym $\frac{4\pi}{3}$ (exempel 1, föreläsning 3). Vi kan kontrollera detta svar genom att byta till sfäriska koordinator och verifiera att

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = \frac{4\pi}{3}. \tag{29}$$

5 Lektion 5 : skiss lösningar

9.2 (a) $\gamma = \{(x(t), y(t)) = (t, 1-2t) : 0 \le t \le 1\}$. Därifrån får du integralen $\int_0^1 (3-2t)\, dt$ som är lätt.

Svar : 2.

(b) Dela upp $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, där $\gamma_1 = \{(t,1) : 0 \le t \le 1\}$ och $\gamma_2 = \{(1, 1-2t) : 0 \le t \le 1\}$. Därifrån, får du att $\int_{\gamma_1} = \int_0^1 dt = 1$ och $\int_{\gamma_2} = \int_0^1 2\, dt = 2$. Alltså, $\int_\gamma = 3$.

9.3 (a) $\gamma = \{(2t, 2t) : 0 \le t \le 1\}$. Alltså, blir integralen $\int_0^1 16t^2\, dt = \frac{16}{3}$.

(b) $\gamma = \{(t, \frac{t^2}{2}) : 0 \le t \le 2\}$. Alltså, blir integralen $\int_0^2 \left(t^2 + \frac{t^3}{2} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{2}\right) dt$. En lätt och långtråkig integral.

Svar : 62/15.

(c) Skriv $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ 'in the obvious manner'. Du får $\int_{\gamma_1} = \int_0^2 t^2\, dt = \frac{8}{3}$, och $\int_{\gamma_2} = \int_0^2 (t^2 - 2t)\ dt = -\frac{4}{3}$. Alltså, $\int_\gamma = \frac{4}{3}$.

9.9 Den är en bra övning att beräkna den kurvintegralen direkt - den är inte FÖR svår. Men Green's sats är enklare och ger den dubbelintegralen

$$\int\int_{x^2+y^2 \le 4} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3\, dr\, d\theta = 8\pi. \tag{30}$$

9.12 Vi har $\int_\gamma e^x\, dx + (1 + xy^2)\, dy$. Notera att γ's ändpunkter har samma x-koordinat, alltså $\int_\gamma e^x\, dx = 0$. På samma sätt, får vi omedelbart att $\int_\gamma 1\, dy = 2$. Nu finns det två vis att bevisa att

$$\int_\gamma xy^2\, dy = \frac{\pi}{8}. \tag{31}$$

(i) Direkt. Använd parameteriseringen $\gamma = \{(\cos t, \sin t) : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ och beräkna integralen $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt$ med hjälp av $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ och $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$.
(ii) Integrandens anti-symmetri m.a.p. x betyder att $\int_\gamma = \frac{1}{2} \int_{\text{cirkeln}}$. Nu tillämpa Green's sats för att få

$$\int_{\text{cirkeln}} xy^2 \, dy = \int \int_{\text{skivan}} y^2 \, dx \, dy. \tag{32}$$

Från skivans symmetri är den sista integralen lika med $\frac{1}{2} \int \int_{\text{skivan}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{8}$.

9.24 Cykloiden ser ut som en upp och ner parabola mellan $(0,0)$ och $(2\pi, 0)$ som vänder i punkten $(\pi, 2)$, men löppningskoeffieienten går mot oändlighet vid båda ändpunkter. Övertyga dig själv att den direkta dubbelintegralen är mycket svår. Alltså, använder vi formulen

$$\oint_{\partial D} (-y \, dx + x \, dy) = 2 \text{ Area}(D), \tag{33}$$

som följer från Green's sats. Här $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2$ där $\gamma_1 =$ cykloiden och $\gamma_2 =$ en sträck längs x-axeln. Man ser direkt att $\int_{\gamma_2} = 0$ och då får att

$$\int_{\gamma_1} (-y \, dx + x \, dy) = \int_0^{2\pi} \left[(1 - \cos t)^2 + \sin t (\sin t - t) \right] \, dt = 6\pi, \tag{34}$$

efter lätta simplificeringar och beräkningar.

Svar : 3π.

9.28 Vi antar att D är bågvis sammanhängande. Enligt Green's sats är

$$\int_\gamma (-f f_y \, dx + f f_x \, dy) = \int \int_D (f_x^2 + f_y^2) \, dx \, dy. \tag{35}$$

Alltså, $f \equiv 0$ längs $\gamma \Rightarrow \vec{\nabla} f \equiv 0$ i $D \Rightarrow f$ konstant i D (Sats 2.5 i PB) $\Rightarrow f \equiv 0$ i D, ty $f \equiv 0$ på randen och f är kontinuerlig.

6 Lektion 6 : skiss lösningar

9.30 $\mathbf{R}^2$ är enk. sam., alltså kan tillämpa Sats 9.4. Du kontrollerar att $\frac{\partial}{\partial x}(y^3 - 3x^2y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2) = -6xy$. Därför är formen exakt.

Om U är en potential funktion då är

$$U = \int (x^2 - 3xy^2)\, dx + \phi(y) = \int (y^3 - 3x^2y)\, dy + \psi(x), \tag{36}$$

för någon ϕ, ψ, som antyder att

$$U(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + C. \tag{37}$$

9.33 Vi måste ange $g(y)$ så att

$$\omega = 2xyg(y)\, dx - g(y)(y^2 + 3a^2 - 3x^2)\, dy \tag{38}$$

är exakt. Villkoret av Sats 9.4 måste uppfyllas. Därifrån, får man att g satisfierar den diffekvation $2g = yg' \Rightarrow g(y) = Cy^2$. Alltså är ω en konstant multipel av

$$\omega_1 = 2xy^3\, dx - y^2(y^2 + 3a^2 - 3x^2)\, dy. \tag{39}$$

På samma sätt som i **9.30**, får man att den allmäna potential funktionen till w_1 är

$$U_1(x,y) = x^2y^3 - a^2y^3 - \frac{y^5}{5} + C^*. \tag{40}$$

9.35 Se det sista exemplet från föreläsning 6.

9.37 Man kan kontrollera att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ men detta garanterar inte att ω är exakt eftersom D är inte enk. sam. Det visar sig att ω inte är exakt : visa, t.ex., att

$$\int_{C(0,1)} w = 2\pi \neq 0. \tag{41}$$

De sista två övningarna handlar om följande situation : Du har en kurvintegral $\int_\gamma \omega$ som du inte kan beräkna direkt (antingen γ är för svårt att parameterisera eller integralen är olösbar efter parameterisering). Men du kan kontrollera att ω är C^1 i något öppet enk. sam. område D som innehåller γ och uppfyller villkoret av Sats 9.4 där, alltså är exakt. Nu har du två mögliga metoder för att beräkna kurvintegralen :

Metod 1 : Beräkna en potential funktion U till ω som vanligt. Alltså, om γ går från p till q, då är

$$\int_\gamma \omega = U(q) - U(p). \tag{42}$$

Metod 2 : Ersätta γ med en kurva σ med samma ändpunkter så att σ kan lätt parameteriseras och $\int_\sigma w$ kan lätt beräknas. Eftersom ω är exakt, då är $\int_\sigma \omega = \int_\gamma \omega$.

9.40 Kontrollera att ω uppfyller villkoret från Sats 9.4 i hela $\mathbf{R}^2$ (enk. sam.). Använd Metod 1. Du beräknar en potential funktion som vanligt och får

$$U(x,y) = ye^{x^2+y} + C. \tag{43}$$

Då är $\int_\gamma \omega = U(1,1) - U(0,0) = e^2$.

9.46 Kontrollera att ω uppfyller villkoret från Sats 9.4 i det öppna området $D = \{(x,y) : x > y\}$ som innehåler γ. Använd Metod 2 ('for a change' !). Ersätta γ med, t.ex., det räta linje stycket σ från $(0,-1)$ till $(1,0)$ som ligger helt i D. Integralen längs σ blir jättelätt !

Svar : 1.

7 Lektion 7 : skiss lösningar

10.1 (a) $\gamma = \{(t,t,4t) : 0 \leq t \leq 2\}$. Alltså blir integralen $\int_0^2 (t^3 + 28t)\, dt = \frac{176}{3}$.

(b) Parameteriseringen ges. Då får du direkt integralen $\int_0^2 (9t^2+8t^3)\,dt = 56$.

10.3 Skriv Y som

$$Y = \{\vec{\boldsymbol{r}}(x,y) = (x,y,2(1-x-y)) : (x,y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2\}, \tag{44}$$

där $D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Då beräknar du att areaelementet $dS = 3\,dx\,dy$ och får du integralen

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 3(2-x-y)\, dy\, dx = 2. \tag{45}$$

10.5 (a) $\hat{n} = \hat{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$. Då är $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos\phi$ på enhetssfären. Det areaelementet är $dS = \sin\phi\; d\phi d\theta$. Då får du integralen

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi\; d\phi\; d\theta = \frac{\pi}{4}. \tag{46}$$

(b) Nu är $\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$ på sfäret. Alltså, får du integralen

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin\phi\; d\phi\; d\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{47}$$

10.7 (a) Y är en cylinder. Skriv $Y = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3$ där Y_1 = de buktiga sidorna, Y_2 = toppen och Y_3 = botten. Den divergens satsen säger att

$$\int\int_{Y_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS + \int\int_{Y_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS + \int\int_{Y_3} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\, dV, \tag{48}$$

där Y begränsar V. Vi är interesserad av $\int\int_{Y_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n} dS$. De andra två ytintegralerna samt den volymintegralen är lätta (vi utelämnar detaljerna här) och du får

$$\int\int_{Y_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = \pi \quad \int\int_{Y_3} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = 0 \quad \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\, dV = 3\pi. \tag{49}$$

Substituera i (48) och får du resultatet.

(b) OBS! Svaret på stencilen är fel. Korrekt svar $= -\frac{73}{6}\pi$.

Y är en 'truncated' kon och kan delas upp i Y_1, Y_2, Y_3 som ovan så att vi är interesserad av $\int\int_{Y_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS$ och (48) stämmer. De andra två ytintegralerna är lätta. Den volymintegralen kräver lite mer arbete men vi utelämnar detaljerna här och nöjer oss med resultaten :

$$\int\int_{Y_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = 16\pi \qquad \int\int_{Y_3} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = -\pi \qquad \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} dV = \frac{17}{6}\pi. \quad (50)$$

Substituera dessa i (48) och får du svaret.

10.9 Denna gång är vi interesserad av flödet genom hela randen ∂V så kan vi tillämpa den Divergens satsen direkt och får

$$\int\int_{\partial V} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\, dV = \int\int\int_V (x-1)\, dV. \qquad (51)$$

Från symmetrin är $\int\int\int_V x\, dV = 0$ och standarda metoder ger att

$$\int\int\int_V dV = \mathrm{vol}(V) = 8\pi. \qquad (52)$$

8 Lektion 8 : skiss lösningar

10.11 Lös ekvationerna $z = 9 - x^2 - y^2$ och $z = 6 + 2x$, och får du $(x + 1)^2 + y^2 = 4$. Dvs att skärningskurvan γ projekterar till denna cirkel i det xy-planet. Kalla den motsvarande skivan för D. Alltså, kan den del S av skalen över γ parameteriseras som

$$S = \{(x, y, 9 - x^2 - y^2) : (x, y) \in D\}. \tag{53}$$

γ begränsar S, då säger Stokes' sats att

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) \cdot \hat{n}\, dS. \tag{54}$$

Beräkna $\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = (0, 0, 2x+1)$. Ekv. (53) antyder att $\hat{n} dS = (2x, 2y, 1)\ dxdy$. Alltså, blir den ytintegralen

$$\int\int_D (2x + 1)\ dx\, dy, \tag{55}$$

som beräknas lätt med polära koordinator.

10.10 Du kan försöka följa exakt samma procedur som i **10.11** men du kommer att få (tror jag !) en ganska komplicerad integral över en ellips i planet. Alltså, här är en mycket lättare alternativ :

Skärningskurvan γ är en cirkel kring enhetssfären som ligger i planet $x + y + z = 0$ och har sin centrum i $(0, 0, 0)$. Låt S vara den skivan i planet som begränsas av γ. Då är S en skiva av radie 1 med normal vektor i riktningen $(1, 1, 1)$. Dvs, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Stokes' sats säger därför att

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_S (-1, -1, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\ dS = -\sqrt{3}\ \text{Area}(S) = -\sqrt{3}\pi. \tag{56}$$

10.12 Beräkna $\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = 2(y - z, z - x, x - y)$. Använd Stokes' sats. Ytan S består av tre triangulära delar S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} i de motsvarande koordinat planen med motsvarande normala vektorer $-\vec{\boldsymbol{e}}_z, -\vec{\boldsymbol{e}}_y, -\vec{\boldsymbol{e}}_x$. Kontrollera att integralen över varje del försvinner.

Svar : 0.

10.13 Explicita beräkningar. Här är hur den lösning till del **(a)** skulle se ut om man användade den Einstein notationen :

$$\begin{aligned}\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{F}}\right)\right]^i &= \partial_i \epsilon^i_{jk}\partial^j F^k \\ &= \left(\epsilon^i_{jk}\partial_i\partial^j\right)F^k \\ &= 0,\end{aligned}$$

ty $\epsilon^i_{jk}\partial_i\partial^j = 0$ för varje k om $\vec{\boldsymbol{F}}$ är C^2.

10.14 Gör själv men notera att termen *solenoidal* betyder divergens-fri. Termen kommer från elektromagnetik, eftersom det magnetiska fältet är alltid divergens-fri.

10.15 Kontrollera att $\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{0}$. Välja den räta linje stycken som γ. Integralen är lätt.

Svar : 16.

9 Lektion 9 : skiss lösningar

Vi löste problem 3,4,5,6 från tentan 990112. Notera att inga lösningar till denna tenta är tillgängliga på expeditionen.

10 Lektion 10 : skiss lösningar

I denna och kommande lektioner, använder jag följande beteckning för att förkorta formuler :

Låt $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Vi skriver $f \sim g$ för att beteckna att $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2.1.1 (a) Standard g.v. $\ln(1+1/x) \sim 1/x$. Alltså, $n \ln(1+n^2) \sim n \cdot \frac{1}{n^2} \to 0$.
(c) Standard g.v. $x^{1/x} \sim 1$. Alltså, $\sqrt[n]{n^2} = (n^{1/n})^2 \sim 1^2 = 1$. Svar : 1.
(e) $1/n \to 0 \Rightarrow \sin(1/n) \to 0 \Rightarrow \ln(\sin(1/n)) \to -\infty$.

2.1.2 (a) $\sin n \to 0$ och $\ln n \to +\infty$. Svar : 0.
(d) Låt $f(x) = \sqrt{1-x}$. Taylor's sats antyder att, för $x \approx 0$,

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2). \tag{57}$$

Alltså, är $\sqrt{1-1/n} - 1 = \frac{1}{2n} + O(1/n^2)$ för $n >> 0 \Rightarrow n\left(\sqrt{1-1/n} - 1\right) = -\frac{1}{2} + O(1/n) \to -\frac{1}{2}$.
(f) Låt $f(x) = \sin x$. Taylor's sats antyder att, för $x \approx 0$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5). \tag{58}$$

Alltså, är $\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{6n^3} + O(1/n^5)$ för $n >> 0 \Rightarrow n^3\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6} + O(1/n^2) \to -\frac{1}{6}$.

2.1.5 (a) $\ln k \to +\infty$.

(b) $\ln(\sin \frac{1}{k}) \to -\infty$.
(c) Standard g.v. $k(e^{1/k} - 1) \to 1$.

2.1.6 Vi har $\frac{1}{4k^2-1} = b_k - b_{k+1}$ där $b_k = \frac{1}{2(2k-1)}$. Eftersom $b_k \to 0$ är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = b_1 = 1/2$.

***2.1.8** Följa ledningen. Multiplicera uppe och nere med $1 - re^{-i\theta}$ för att få att

$$\frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 - r\cos\theta + i(r\sin\theta)}{1 - 2r\cos\theta + r^2}. \tag{59}$$

Notera nu att $r^k e^{ik\theta} = r^k \cos k\theta + i(r^k \sin k\theta)$.

* Notera också den utvidning av denna övning som beskrivs i sammandraget av dagens föreläsning.

11 Lektion 11 : skiss lösningar

2.2.1 (a) $\frac{k+1}{3k^3+5k+2} \sim \frac{1}{3k^2}$. Alltså konvergerar serien enligt JK.
(c) $\sqrt{k}\sin\frac{1}{k^2} \sim \sqrt{k}\cdot\frac{1}{k^2} = k^{-3/2}$. Alltså konvergerar serien enligt JK.
(e) $\frac{1}{k\cdot\tan^{-1}k} \sim \frac{2/\pi}{k}$. Alltså divergerar serien enligt JK.

2.2.2 (a) $\frac{1}{\sqrt{1+k^\alpha}} \sim \frac{1}{k^{\alpha/2}}$. Alltså konvergerar serien omm $\alpha > 2$ enligt JK.

2.2.3 (a) $\ln(1+1/k) \sim 1/k$. Alltså divergerar serien enligt JK.
(d) $\sin\frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} + O(1/k^5)$. Alltså är $k^2(\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}) = -\frac{1}{6k} + O(1/k^3)$, så serien divergerar enligt JK.
(g) $k^n e^{-\sqrt{k}} \to 0$ för alla $n > 0$. Alltså konvergerar serien enligt JK.

2.2.4 (a) $\frac{k}{(\sqrt{k}+k^2)^\alpha} \sim k^{1-2\alpha}$. Alltså konvergerar serien enligt JK omm $1-2\alpha < -1 \Leftrightarrow \alpha > 1$.
(c) $\cos(1/k) = 1+\frac{1}{2k^2}+O(1/k^4)$. Alltså är $\frac{1-\cos(1/k)}{k^\alpha} \sim \frac{1}{2k^{\alpha+2}}$. Då konvergerar serien enligt JK omm $\alpha+2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > -1$.

2.2.5 (a) Lättare att lösa med hjälp av det *kvotkriteriet* (avsnitt 2.4), så vi kommer tillbaka till denna övning i lektion 12.

***2.2.6** Notera följande version av den integral testen för VÄXANDE funktioner :

Proposition. *Antag att $f(x)$ är kontinuerlig och växande i $[0,+\infty)$. Då för varje $n > 0$ har vi att*

$$\int_0^n f(x)\,dx < \sum_{k=1}^{n} f(n) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx. \qquad (60)$$

För denna övning, tillämpa (60) till $f(x) = \sqrt{x}$.

***2.2.8** Vi löste den inte, men notera att det finns en förstarkning av resultatet i del **(d)**, den så kallade *Stirling's formulen* som säger att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, e^n}{\sqrt{2\pi n}\, n^n} = 1. \tag{61}$$

Det standarda beviset av denna formul använder komplex analys och det är för svårt att ge i den här kursen. Notera att den imponerande saken i formulen är faktoren $\sqrt{2\pi n}$!!

2.3.1 (a) $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+n^3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+n^3}} \sim n^{-3/2}$ som konvergerar enligt JK.

2.3.2 (c) Låt $a_k = 1/\ln k$, $b_k = \cos k$ och tillämpa DT. Villkor (i) satisfieras enligt vår utvidning av **2.2.8**. Det är klart att villkor (ii) och (iii) satisfieras.

Obs : Man kan bevisa att serien är betingad konvergent, men det är något svårare. Tänk på den !!

2.3.3 $\left|\frac{(-1)^k}{k(\ln k)^\alpha}\right| = \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$. Alltså är serien AK omm $\alpha > 1$ enligt den integral testen (prop. 2.6, s. 65 i boken).

Å andra sidan påstår jag att serien själv konvergerar för alla $\alpha \in \mathbf{R}$. För att bevisa detta räcker det, enligt DT, att visa att $k(\ln k)^\alpha$ är avtagande och går mot noll för alla α. Det är klart att följden går mot noll, och att den är avtagande för $\alpha \geq 0$. För $\alpha < 0$ är det också klart att följden är avtagande för $k >> 0$ (beroende på α), men det är lätt att se att DT kan modifieras för att behandla denna situation, dvs DT stämmer fortfarande om vi ersätter villkor (ii) med det lite svagare villkoret att a_k är avtagande för alla $k >> 0$.

2.3.4 (a) Sätt $a_k = -\ln(\cos\frac{1}{\sqrt{k}})$ och $b_k = -\cos k$ och kontrollera att alla tre villkor för DT satisfieras.

2.3.5 (a) $\left|\frac{\sin k}{k^4}\right| \leq \frac{1}{k^4}$. Alltså är serien AK enligt JK.

(c) $\ln(\sin \frac{1}{k}) \to -\infty$. Alltså är serien divergent eftersom den k:te termen går inte mot noll.
(e) $\left|\frac{e^{ik}}{1+\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{1+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$ så serien är inte AK enligt JK.

Å andra sidan, serien själv är konvergent. Sätt $a_k = \frac{1}{1+\sqrt{k}}$, $b_k = e^{ik}$ och kontroillera att alla tre villkor för DT satisfieras.

Slutsats : serien är BK.

12 Lektion 12 : skiss lösningar

2.3.6 Efter substitutioner $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$, $u = 2k$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ får du serien i formen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sin^2(k+1/k) - \sin^2 k\right] = \sum_{u=1}^{\infty}\cos u(1-\cos\frac{4}{u}) + \sum_{u=1}^{\infty}\sin u \sin\frac{4}{u}. \quad (62)$$

Både u-serier är konvergenta enligt DT. I den första tag $a_u = 1-\cos\frac{4}{u}, b_u = \cos u$. I den andra tag $a_u = \sin\frac{4}{u}, b_u = \sin u$.

2.3.8 Denna övning har ingenting att göra med DT. Lösning : $\sum|a_n|$ konvergent $\Rightarrow |a_n| \to 0$. Alltså är $|a_n| < 1$ för $n >> 0$, så att $|a_n^2| = |a_n|^2 \le |a_n|$ för alla $n >> 0$. Enligt JK är $\sum a_n^2$ AK. Notera att detta säger mer än '$\sum a_n^2$ konvergent' i fall de a_n inte är reella tal.

2.4.1 (a) $a_n = 1$ om $n = k!$ för någon k, och $a_n = 0$ annars. Alltså är $a_n = 1$ för oändliga många n så att $\limsup|a_n|^{1/n} = 1$. Därför, $R = 1$.
(c) Kontrollera att $|a_n|^{1/n} \to \frac{1}{2}$. Alltså är $R = 2$.

2.4.2 (a) $|a_n|^{1/n} = \sqrt{\frac{2n+1}{3n}} \to \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Alltså är serien konvergent enligt RK.
(c) Kontrollera att $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 3/e > 1$. Alltså är serien divergent enligt KK.

2.4.3 (a) $|a_n|^{1/n} = \frac{|\cos n|^{1/n}}{n} \le \frac{1}{n} \to 0$. Alltså är $R = \infty$ enligt Had. formul.
(c) Låt $w = z^3$. Stirling's formul antyder att $a_n = \frac{n^n}{n!} \sim \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$. Alltså $|a_n|^{1/n} \sim \frac{e}{(2\pi n)^{1/2n}} \to e$. Då är $R = 1/e$ för den w-serien. Detta svarar mot $R = 1/\sqrt[3]{e}$ för den z-serien.

2.4.4 (a) Låt $w = z - i$ så att serien är $\sum nw^n$. Vi har $|a_n|^{1/n} = n^{1/n} \to 1$, så $R = 1$. Alltså konvergerar serien när $|w| < 1$ och divergerar när $|w| > 1$.

När $|w| = 1$ divergerar serien också eftersom den n:te termen går inte mot noll.

Alltså konvergerar serien omm $|w| < 1$, dvs omm $|z - i| < 1$.

(c) Den lättaste lösningen är att först använda DT. Följden $a_n = 1-\cos\frac{1}{n}$ är avtagande, alltså säger DT att serien konvergerar så snart som de partiella summorna av $\sum z^n$ är begränsade, som stämmer för alla z så att $|z| \leq 1$, med undantag av $z = 1$.

Men serien konvergerar ju också för $z = 1$. Nu har vi $0 < \sum 1 - \cos\frac{1}{n} \leq \sum \frac{1}{2n^2} < \infty$ enligt den Taylor utvecklingen av $\cos x$ nära $x = 0$.

Serien divergerar för alla z så att $|z| > 1$. Den Taylor utveckling av $\cos x$ antyder att $1 - \cos\frac{1}{n} \geq \frac{c}{n^2}$ för någon konstant $c > 0$. Då är seriens n:te term nedre begränsad i absolut belopp av $\frac{c}{n^2}|z|^n$. Men denna kvantitet går mot ∞ när $n \to \infty$.

13 Lektion 13 : skiss lösningar

2.4.5 (a) $a_n^{1/n} = (\cos\frac{1}{n})^{n^2}$. Den Taylor utvecklingen av $\cos x$ kring $x = 0$ antyder att, för varje $\epsilon > 0$, är $1 - \frac{1}{2n^2} \le \cos\frac{1}{n} \le 1 - \frac{\frac{1}{2}-\epsilon}{n^2}$ för alla $n >> 0$. Alltså, är

$$(1 - \frac{1}{2n^2})^{n^2} \le (\cos\frac{1}{n})^{n^2} \le (1 - \frac{\frac{1}{2}-\epsilon}{n^2})^{n^2}, \quad n >> 0. \tag{63}$$

Nu låt $n \to \infty$ och ser du att

$$e^{-1/2} \le \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \le e^{-1/2+\epsilon}, \tag{64}$$

för alla $\epsilon > 0$. Det följder att $|a_n|^{1/n} \to e^{-1/2} < 1$. Alltså antyder det RK att serien konvergerar.

2.4.6 (b) Serien konvergerar omm $\sum \frac{z^{2n}}{n(1+2^n)}$ konvergerar. Låt $w = z^2$ och betrakta i stället den w-serien $\sum \frac{w^n}{n(1+2^n)}$. Den konvergens radien ges av $1/R = \limsup[n(1+2^n)]^{-1/n} = 1/2 \Rightarrow R = 2$.

På randcirkeln är $w = 2e^{i\theta}$. Serien konvergerar om $\theta \neq 0$ enligt DT eftersom $\frac{1}{n(1+2^n)} \to 0$ monotoniskt. Men serien divergerar om $\theta = 0$ eftersom $\frac{1}{n(1+2^n)} \sim \frac{1}{n}$ och den harmoniska serien divergerar.

Slutsatsen då är att den ursprungliga z-serien konvergerar för alla z så att $|z| \le \sqrt{2}$, med undantag av den enda punkten $z = \sqrt{2}$.

3.1.1 (a) I mängden M är $||\frac{2^k z^k}{k\sqrt{k}}|| = \frac{1}{k\sqrt{k}}$ och $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$ konvergerar. Alltså konvergerar serien enligt den M-testen.

14 Lektion 14 : skiss lösningar

3.1.2 **(a)** $f_n(x) \to x$ punktvis. Dessutom, $|f_n(x) - x| = \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \left|\frac{x}{1+nx}\right| \leq \frac{1}{n}$ för alla $x \in M$.

Dvs, om $f(x) := x$ då $f_n \to f$ och $||f_n - f|| \leq \frac{1}{n} \to 0$ så att $f_n \to_L f$, v.s.v.

(d) Notera att varje f_n är en funktion av två variabler. Men det spelar ingen roll - definitionen av punktvis/likformig konvergens funkar lika bra för funktioner av flera variabler. Med trivialla modifkationer av notation, detsamma gäller satser 3.1, 3.2, 3.3 och 3.4. Satser 3.5 och 3.6 gäller också i högre dimensioner om vi ersätter vanliga integraler med multipelintegraler. Å andra sidan, notera att satser 3.7 och 3.8 är meningsfulla bara för funktioner av en variabel.

Ledningen föreslår att inleda polära koordinator, men det behövs inte. Först, notera direkt att $f_n \to 0$ punktvis. Nästa, Cauchy-Schwarz säger att $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ för alla $x, y \in \mathbf{R}$. Det följer omedelbart att $||f_n|| \leq \frac{1}{2n} \to 0$, så att $f_n \to_L 0$.

3.1.5 $||a_k \cos kx|| = ||a_k \sin kx|| = |a_k|$. Eftersom $\sum |a_k| < \infty$, Weierstrass' M-test antyder att de Fourierserierna konvergerar likformigt.

3.2.1 **(a)** Sätt $f_n(x) := \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+x-1}} e^{-nx}$ och $f(x) := \sum f_n(x)$. Notera att serien konvergerar punktvis för $x > 0$, alltså är f väldefinierad för sådana x. Notera också att $f(1) = \frac{1}{e-1}$ (summa av en geometrisk serie). Alltså, måste vi visa att $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, dvs att funktionen f är kontinuerlig vid $x = 1$. Eftersom varje f_n är tydligt kontinuerlig i hela $\mathbf{R}$, så räcker det, enligt sats 3.4, att bevisa att $\sum f_n \to_L f$ i en omgivning av $x = 1$. För att visa detta, använder vi den M-testen. Till exempel, i omgivningen $[\frac{1}{2}, \infty)$ ser man lätt att $||f_n|| \leq \sqrt{2} e^{-n/2}$. Och $\sum e^{-n/2}$ tydligt konvergerar.

3.2.2 **(a)** Sätt $f_n(x) := \frac{\sin nx}{n^3}$ och $f(x) := \sum f_n(x)$. Notera att $\int_0^{2\pi} f_n(x) dx = 0$ för varje n. Alltså, säger ekvationen att $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\, dx$.

För att bevisa detta räcker det, enligt sats 3.6 att visa att $\sum f_n \to_L f$ i intervallen $[0, 2\pi]$. För att visa detta, använder vi den M-testen. Man ser lätt att $||f_n|| = \frac{1}{n^3}$. Och $\sum \frac{1}{n^3}$ konvergerar.

3.3.3 (a) Vi tillämpar sats 3.8. Det räcker att bevisa två saker :

(i) serien konvergerar punktvis i hela $\mathbf{R}$.
(ii) serien av derivator konvergerar likformigt i hela $\mathbf{R}$.

BEVIS AV (I) : Vi kan tillämpa Dirichlet's test (kor. 2.10) om vi kan visa att, för varje x, följden $\frac{1}{n}\sin(1 + x/n)$ är avtagande för $n >> 0$ (det är klart att följden $\to 0$). För att visa detta, fixera x och betrakta funktionen

$$f(t) := \frac{1}{t}\sin(1 + x/t). \tag{65}$$

Beräkna direkt att

$$f'(t) = \frac{-\sin(1 + x/t) - \frac{x}{t^2}\cos(1 + x/t)}{t^2} \tag{66}$$

och notera att $f'(t) < 0$ för $t >> 0$.

BEVIS AV (II) : $\frac{d}{dx}\left[\frac{(-1)^n}{n}\sin(1 + x/n)\right] = \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(1 + x/n)$. Sätt $f_n(x) := \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(1 + x/n)$. För att bevisa att $\sum f_n$ konvergerar likformigt i hela $\mathbf{R}$, använder vi den M-testen som vanligt. För man ser lätt att $||f_n|| \leq \frac{1}{n^2}$. Och $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerar.

OBS! Denna övning kan också lösas med de metoder som inleds i avsnitt 3.3 (sats 3.10).

3.2.5 Vi skall visa att summan konvergerar likformigt i varje kompakt delmängd till den öppna skivan. Varje sådan kompakt delmängd ligger i en sluten delskiva av formen $x^2 + y^2 \leq r < 2$, så räcker det att bevisa likformigt konvergens i dessa slutna delskivor. Eftersom varje punkt av den öppna skivan ligger i inren till en sluten delskiva, då följer kontinuitet av f från Sats 3.4.

För att bevisa likformig konvergens i skivan $D: \ x^2+y^2 \leq r < 2$, använder vi den M-testen som vanligt. Cauchy-Schwarz antyder att $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ för alla reella tal x, y. Alltså är $|xy|^n \leq (r/2)^n$ i D så att $||\frac{(xy)^n}{1+n(x^2+y^2)}|| \leq (r/2)^n$. Och $\sum (r/2)^n$ konvergerar eftersom $r/2 < 1$.

Obs! Summan konvergerar INTE likformigt i hela öppna skivan $x^2+y^2 < 2$ (övning !).

3.4.1 Notera att potenserien har konvergensradie $= 1$ så att $f(x)$ är väldefinierad för $-1 < x < 1$. Sats 3.13(a) antyder att vi kan integrera termvis och då får vi att

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (k+1)t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x}. \tag{67}$$

Nu differentiera båda sidor och får du att $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Obs! I denna övning bevisar vi faktiskt den Binomial satsen för potensen -2. Den BS säger att, för $|x| < 1$,

$$(1-x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} -2 \\ k \end{array} \right) x^k. \tag{68}$$

Och man kontrollerar att $\left(\begin{array}{c} -2 \\ k \end{array} \right) = k+1$.

3.4.4 (b) Betrakta potenserien

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} x^k. \tag{69}$$

Vi måste beräkna $f(1)$. Notera att $R = \infty$ för denna serie (kvotkriteriet eller Hadamard + Stirling). Alltså, finns det inget problem med att integrera serien termvis. Först, simplificera lite : notera att $k^2/k! = k/(k-1)!$. Nu skriv

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k-1)!} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}. \tag{70}$$

Den sista summan är lika med $x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = xe^x$. Då har vi att

$$f(x) + xe^x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{(k-1)!}x^k. \tag{71}$$

Integrera nu båda sidor och får du att

$$\int_0^x (f(t) + te^t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x \frac{k+1}{(k-1)!}t^k\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{(k-1)!} = x^2e^x. \tag{72}$$

Differentiera nu båda sidor en gång till och får du att $f(x)+xe^x = \frac{d}{dx}(x^2e^x) = (x^2+2x)e^x$, så att äntligen

$$f(x) = (x^2+x)e^x. \tag{73}$$

Därför är $f(1) = 2e$.

15 Lektion 15 : skiss lösningar

3.3.1 (a) Sätt $f_k(x) := \frac{1}{\ln k}$, $g_k(x) := \cos kx$. Det är klart att villkor (i) och (ii) av sats 3.10 satisfieras, och villkor (iii) satisfieras också enligt Lemma 3.9 eftersom $M \subset (0, 2\pi)$.

3.3.2 $-1 = e^{i\pi}$. Byta variabler $u := x + \pi$ så att serien är $\sum \frac{e^{inu}}{\sqrt{n+(u-\pi)^2}}$ och vi måste bevisa kontinuitet i $(0, 2\pi)$. Enligt sats 3.4 räcker det att bevisa likformig konvergens av summan i varje kompakt delintervall. Vi använder Dirichlet's test. Sätt $f_n(u) := \frac{1}{\sqrt{n+(u-\pi)^2}}$, $g_n(u) = e^{inu}$. Villkor (i) och (ii) ses lätt satisfieras och villkor (iii) satisfieras enligt lemma 3.9.

3.3.4 (a) Följer direkt från Sats 3.11 : f är 2π-periodisk och C^1.
(b) Jag kan se ingen metod för att bevisa likformig konvergens utan att räkna ut de Fourier koefficienterna, så vi gör detta först. Vi får

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \cos n(u+\pi)\, du = \frac{4}{n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 \sin n(u+\pi)\, du = 0, \end{aligned} \tag{74}$$

där a_n beräknas genom partiell integration, och $b_n = 0$ eftersom den sista integranden är udde.

Notera att $\sum a_n$ är absolut konvergent, alltså konvergerar den Fourier serien likformigt enligt Weierstrass' M-test (övning 3.2.5).

(c) Då har vi att

$$(x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx. \tag{75}$$

Man får de två ekvationerna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{och} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \tag{76}$$

genom att sätta in $x = 0$ och $x = \pi$ respektivt.

Tenta 990112

7. Obs! Det finns ett misstryck. Summan borde börja med $n = 1$.

Skriv om serien som $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}} z^n$. Inleda den nya variabeln $w := \frac{2}{\sqrt{3}} z$ så att serien blir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{(2n+1)^2}$.

För den w-serien är $1/R = \limsup (2n+1)^{-2/n} = 1$, så $R = 1$. På randcirkeln $|w| = 1$ och serien konvergerar absolut i varje punkt eftersom $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ konvergerar.

Alltså, den w-serien konvergerar omm $|w| \leq 1$ så att den z-serien konvergerar omm $|z| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Se lösningen till övning **3.2.2 (a)** i lektion 14.