Tillägg till föreläsningsanteckningarna

Låt θ vara en spetsig vinkel. $\cos\theta$ och $\sin\theta$ definierades i termer av längderna av den närliggande resp. motsatta sidan i en rätvinklig triangel där hypoteneusen hade längd 1. Genom att skala den bilden så kan vi härleda att, i vilken rätvinklig triangel som helst, om θ är en av de andra två vinklarna, så gäller att

$$\cos\theta = \frac{\text{Närliggande sidan}}{\text{Hypoteneusen}} \qquad \sin\theta = \frac{\text{Motsatta sidan}}{\text{Hypoteneusen}}. \tag{1}$$

Exempel : Man ska bygga ett hus med en inre och en yttre vägg. Det är givet att

(i) taket har en lutning av 9 grader
(ii) den ytrre väggen är 235 cm hög
(iii) det är 2 meter mellan väggarna.

Hur högt ska den inre väggen vara ?

Lösning : Låt h vara höjdskillnaden mellan de två väggarna. Tag en tvärsnitt av området som avgränsas av taket och de två väggarna. Då har vi en rätvinklig triangel ABC (se bilden)

där $\angle B$ är rät, $\angle A = 9^\circ$, $|AB| = 2m$ och $|BC| = h$. Det finns tillräckligt med information här för att kunna beräkna h : nu tar vi oss an detaljerna. Låt $|AC| := r$. Enligt formlerna (1) ovan så gäller att

$$\cos 9^\circ = \frac{2}{r}, \qquad \sin 9^\circ = \frac{h}{r}.$$

Dessa ekvationer kan skrivas om som

$$r = \frac{2}{\cos 9^\circ}, \qquad r = \frac{h}{\sin 9^\circ},$$

från vilka vi härleder direkt att

$$\frac{2}{\cos 9^\circ} = \frac{h}{\sin 9^\circ}.$$

Kryss-multiplikation ger att

$$h \cdot (\cos 9^\circ) = 2 \cdot (\sin 9^\circ),$$

som till slut medför att

$$h = 2 \cdot \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ}. \tag{2}$$

Det återstår alltså att beräkna sinus och cosinus av 9 grader.

Alternativ 1 : Knappa in i miniräknaren direkt. Notera att default-setting för alla (?) miniräknare är att vinklar mäts i grader. OK, så jag har knappat in här på min dator och fått att

$$\sin 9^\circ \approx 0,15643447... \qquad \cos 9^\circ \approx 0,98768834...$$

Substituerar vi dessa värden in i (2) så får vi att

$$h \approx 2 \times \frac{0,15643447}{0,98768834} \approx 0,31676889...$$

Så höjdskillnaden mellan väggarna ska vara ca. 31,7 cm, som innebär att den inre väggen ska vara ca. 266,7 cm högt.

Alternativ 2 : Tanken här är att man vill använda miniräknaren så lite som möjligt och i stället 'tänka ut' saker så långt det går, så länge man accepterar att man får lite sämre uppskattningar. Först så ser vi direkt från den bild jag ritade på föreläsningen att, om θ är en 'liten' vinkel så är uppskattningen

$$\sin \theta \approx \theta, \text{ mätt i radianer}$$

bra. Hur bra är det för $\theta = 9^\circ$? Well, det är bara att kolla. I radianer, så har vi att

$$9 \text{ grader} = 9 \times \tfrac{\pi}{180} \text{ radianer} \approx 0,15707963... \text{ radianer}.$$

Jag har förstås använt miniräknaren för den sista beräkningen ovan, men bara för att dela ett tal med ett annat, där jag (dvs ni) försår lite bättre vad miniräknaren egentligen gör än när man trycker på 'sin' knappen.

Den viktiga poängen är att om du jämför denna uppskattning av $\sin 9^\circ$ med den vi fick direkt från miniräknaren i Alternativ 1 ovan, så ser vi att skillnaden är väldigt liten (mindre än $0,4$ procent).

Kan vi också nu beräkna $\cos 9^\circ$ utan att knappa in direkt i miniräknaren ? JA, t.ex. genom att använda formeln

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1, \tag{3}$$

som gäller för varje vinkel θ. Tar vi $\theta = 9^\circ$ och sätter in den redan framtagna uppskattningen av $\sin 9^\circ$ så får vi att

$$(0,15707963)^2 + (\cos 9^\circ)^2 \approx 1,$$

som medför att

$$(\cos 9^\circ)^2 \approx 1 - (0,15707963)^2 \approx 1 - 0,024674011 = 0,97532599.$$

Till slut då har vi att

$$\cos 9^\circ \approx \sqrt{0,97532599} \approx 0,98758594.$$

Jämför vi denna uppskattning med den vi fick i Alternativ 1, så ser vi igen att skillnaden är väldigt liten. Jag har förstås använt miniräknaren i beräkningarna här, men bara för att multiplicera och för att beräkna en kvadratisk rot, så det handlar fortfarande om operationer som vi (dvs ni) förstår mycket bättre än direkta beräkningar av sinus och cosinus funktionerna.

Sätter vi in allting i (2) så får vi denna gång att

$$h \approx 2 \times \frac{0,15707963}{0,98758594} \approx 0,31810828.$$

Detta säger att höjdskillnaden är ca. 31,8 cm. Så vårt försök att använda miniräknaren så lite som möjligt har lett till ett avrundningsfel i slutsvaret av ca. 0,1 cm. Detta är nog något som byggfirman skulle kunna leva med !