# Utmaning 2

Bakgrund läsning för dagens material är s.39-42 i *Matematik tar form*, plus den utdelade stencilen om *Eratosthenes såll.*

**Del 1 (att leka med primtal)**

Utan att fuska (dvs utan att titta på nätet, i en bok o.s.v.), hitta alla primtal upp till 300. Gör en komplett lista över alla primtalen. Du ska nu leta efter mönster i denna lista. Här följer några förslag :

**1.** Undersók skillnaden mellan på varandra följande primtal. Ser du några mönster i listan av skillnader ? Om vi skulle gå till högre tal, tror du att vi skulle kunna få större skillnader mellan primtal ?

**2.** Beräkna antalet primtal upp till 10 och dela med 10. Gör samma beräkning för 20, 30, o.s.v., hela vägen till 300. Vad händer med kvoten ? Vad tror du händer om vi går till större tal ?

**3.** När man delar ett tal med 4, så finns det såklart fyra möjligheter för resten, nämligen 0,1,2 eller 3. Dela nu upp din lista över primtal i fyra mindre listor, enligt resten man får när man delar primtalet med 4. Jämför de 4 mindre listorna - kommentarer ?

Ersätt 4 med 5 och genomför en liknande uppdelning av listan i fem mindre listor, enligt resten man får när man delar primtalet med 5. Ser du någon skillnad mellan detta fall och 4-fallet ? Kan du formulera en allmän hypotes ?

**4 (från en gammal tenta)** Om skillnaden mellan två primtal är 2, då sägs de utgöra ett *tvillingspar*. Hur många primtalstvillingspar finns det upp till 300 ?

Man kan också prata om *primtalstrillingar*, dvs 3 st. på varandra följande udda tal som allihop är primtal. Hur många sådana trillingar finns

det upp till 300 ? Hur många blir det upp till 600 tror du ?
Till 1,000,000 ? Kan du bevisa något ?

**Del 2 (egenskaper hos primtal)**

Primtal har många olika egenskaper som gör det möjligt ibland att känna igen ett primtal utan att behöva testa och se att det har inga faktorer utom 1 och sig självt. Vi ska nu undersöka några. Detta material kommer delvis att tas upp på föreläsningar, men bara om tiden räcker :

**1.** Ett tal $n$ med egenskapen (E) nedan måste vara ett primtal. Försöka förklara varför, med rektangler t.ex. :

(E) ... När som helst vi har två tal vars produkt är delbart med talet $n$, så måste minst ett av talen själva vara delbart med $n$.

**2.** Betrakta primtalet 5, t.ex. $5 - 1 = 4$, WOW ! OK, tag nu ett godtyckligt tal $t$ som inte ligger i 5:ans tabell. Beräkna $t^4$, dvs multiplicera talet $t$ med sig självt 4 ggr. Dela detta tal med 5 och beräkna resten. Vad blir det ? Gör nu samma beräkning för några andra tal $t$ utanför 5:ans tabell. Vad händer ?

Om vi hade börjat med primtalet 7 i stället, vilken kedje av beräkningar skulle vi genomföra för att se ett likadant mönster ? Ser vi samma mönster om vi börjar med ett tal som inte är ett primtal ? Kan du formulera en allmän hypotes ?

**3.** Vi har såklart att

$$5 = 1^2 + 2^2.$$

Detta betyder att det finns en rättvinklig triangel vars kateter har heltalslängder och vars hypoteneus har längden $\sqrt{5}$.

Gå igenom alla tal $n = 1, 2, 3, ..., 100$ och kolla för varje $n$ om det finns en rättvinklig triangel vars hypoteneus har längd $\sqrt{n}$ och vars kateter har heltalslängder. Gör en lista över de tal $n$ för vilka det finns (minst) en sådan triangel. Ser du några mönster ? Lägg märke speciellt till primtalen i listan. Kan du förklara någonting ?