LNM 100 : Tentamen 051104

Lösningar

1. Vi börjar med att ta fram primtalsfaktoriseringen av 156 :

$$156 = 2 \cdot 78 = 2 \cdot 2 \cdot 39 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13.$$

Primtalskfatorerna kan kombineras på följande olika sätt

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
2 &= 2 \\
3 &= 3 \\
13 &= 13 \\
2 \cdot 2 &= 4 \\
2 \cdot 3 &= 6 \\
2 \cdot 13 &= 26 \\
3 \cdot 13 &= 39 \\
2 \cdot 2 \cdot 3 &= 12 \\
2 \cdot 2 \cdot 13 &= 52 \\
2 \cdot 3 \cdot 13 &= 78 \\
2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 &= 156.
\end{aligned}$$

Därmed har vi den fullständiga listan över alternativen för antalet barn.

2. Det minsta antalet liter som kan mätas upp är $\mathrm{SGD}(368, 116)$. Vi räknar fram detta m.h.a. Euklides algoritm :

$$\begin{aligned}
368 &= 3 \cdot 116 + 20 \\
116 &= 5 \cdot 20 + 16 \\
20 &= 1 \cdot 16 + 4 \\
16 &= 4 \cdot 4 + 0,
\end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(368, 116) = 4$. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för 368 och 116. Vi har nämligen

$$\begin{aligned}
368 = 2 \cdot 184 = 2 \cdot 2 \cdot 92 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 46 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23, \\
116 = 2 \cdot 58 &= 2 \cdot 2 \cdot 29.
\end{aligned}$$

En gång till så ser vi att $\mathrm{SGD}(368, 116) = 2 \cdot 2 = 4$.

3. Talets sista siffra är en 7:a. Vi har

$$7 = 3 \cdot 2 + 1,$$
$$7 = 1 \cdot 5 + 2,$$

som innebär att talet lämnar rest 1 (resp. 2) vid division med 2 (resp. 5).

Talets två sista siffror är 67 och

$$67 = 16 \cdot 4 + 3,$$

som innebär att talet lämnar rest 3 vid division med 4. Talets tre sista siffror är 667, och

$$667 = 83 \cdot 8 + 3,$$

som innebär att talet lämnar rest 3 vid division med 8. Talets siffersumma kontrolleras vara 114, som i sin tur har siffersumma 6. Eftersom

$$6 = 2 \cdot 3 + 0,$$
$$6 = 0 \cdot 9 + 6,$$

så ser vi att talet lämnar rest 0 (resp. 6) vid division med 3 (resp. 9).

4. Vi letar efter ett heltal n så att

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2} &\approx 480 \\ \Rightarrow n^2 &\approx 2 \times 480 \\ \Rightarrow n^2 &\approx 960 \\ \Rightarrow n &\approx \sqrt{960}. \end{aligned}$$

Men $31 \cdot 31 = 961$ så vi får att $n \approx 31$. Den exakta formeln för det n:te triangeltalet ges av

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Sätter vi in $n = 31$ så får vi att det 31:te triangeltalet är $\frac{31 \cdot 32}{2} = 31 \cdot 16 = 496$, som är lite för stor. Det 30:e triangeltalet är därmed $496 - 31 = 465$. Eftersom

$$480 - 465 = 15 < 16 = 496 - 480,$$

så är det det 30:e triangeltalet som ligger närmast 480.

5 (i) Den 5:te raden av multiplikationstabellen på en 22-klocka består av resterna som lämnas vid division med 22 av de 22 första talen i 5:ans tabell. Den ser ut så här alltså

$$5\ 10\ 15\ 20\ 3\ 8\ 13\ 18\ 1\ 6\ 11\ 16\ 21\ 4\ 9\ 14\ 19\ 2\ 7\ 12\ 17\ 0.$$

(ii) $22 = 2 \cdot 11$. Därmed förkommer alla talen i de rader som ligger i varken 2:ans eller 11:ans tabell, dvs rader nummer

$$1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 9\ \ 13\ \ 15\ \ 17\ \ 19\ \ 21.$$

6 (i) Varje Hanoital är lika med två gånger det föregående Hanoitalet plus ett. Detta pga för att flytta ett torn med $n+1$ klossar så ska man först flytta tornet bestående av de n översta klossarna, då ska den största klossan flyttas till den lediga stolpen och till slut så ska de första n klossorna flyttas på denne igen.

(ii) Det 360:e Hanoitalet ges av $2^{360} - 1$. Det räcker alltså att uppskatta 2^{360}. Vi har följande grova uppskattning :

$$2^{360} = (2^{10})^{36} \approx (10^3)^{36} = 10^{3\times 36} = 10^{108}.$$

Detta tal har 109 decimalsiffror, så det står klart att alternativ (b) måste vara korrekt.

7.

$$106 \times 118 = 105 \times 119 + (118 - 105). \tag{1}$$

Alltså är skillnaden mellan talen lika med 13 och 106×118 är störst.

Vi kan förklara (1) på följande vis : vi tolkar 106×118 som en uppsättning av bollar där vi har 106 grupper av bollar med 118 st. i varje. Tar man bort en grupp då har man 118 bollar mindre. Nu har man 105 grupper med 118 st. i varje. Lägger man till en boll till varje grupp så har man 105 extra bollar. Nu har man 105 grupper med 119 i varje, som blir vår tolkning av talet 105×119.

Eftersom vi har i slutet 13 bollar mindre än i början (vi har tagit bort 118 st. och lagt till 105 st.) så har vi lyckats förklara (1).