LNM 100 : Tentamen 180105

Lösningar

1. Antalet barn måste gå jämnt upp i både 462 och 306. De alternativ man har för antalet barn är alltså de gemensamma delarna till 462 och 306. Vi räknar först fram deras största gemensamma delare (SGD) m.h.a. Euklides algoritm :

$$\begin{aligned} 462 &= 1 \cdot 306 + 156 \\ 306 &= 1 \cdot 156 + 150 \\ 156 &= 1 \cdot 150 + 6 \\ 150 &= 25 \cdot 6 + 0, \end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(462, 306) = 6$. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för 462 och 306. Vi har nämligen

$$\begin{aligned} 462 &= 2 \cdot 231 = 2 \cdot 3 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11, \\ 306 &= 2 \cdot 153 = 2 \cdot 3 \cdot 51 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17. \end{aligned}$$

En gång till så ser vi att $\mathrm{SGD}(462, 306) = 2 \cdot 3 = 6$.

Den fullständiga listan över de gemensamma delarna till 462 och 306 ges nu av de tal som går jämnt upp i 6, nämligen 1,2,3 och 6. Dessa utgör alla alternativen för antalet barn.

2 (i) Den 9:e raden av multiplikationstabellen på en 28-klocka består av resterna som lämnas vid division med 28 av de 28 första talen i 9:ans tabell. Den ser ut så här alltså

9 18 27 8 17 26 7 16 25 6 15 24 5 14 23 4 13 22 3 12 21 2 11 20 1 10 19 0.

(ii) $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$. Därmed förkommer alla talen i de rader som ligger i varken 2:ans eller 7:ans tabell, dvs rader nummer

$$1 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 9 \;\; 11 \;\; 13 \;\; 15 \;\; 17 \;\; 19 \;\; 23 \;\; 25 \;\; 27.$$

3. Talets sista siffra är en 9:a. Vi har

$$\begin{aligned} 9 &= 4 \cdot 2 + 1, \\ 9 &= 1 \cdot 5 + 4, \end{aligned}$$

som innebär att talet lämnar rest 1 (resp. 4) vid division med 2 (resp. 5).

Talets två sista siffror är 99 och

$$99 = 24 \cdot 4 + 3,$$

som innebär att talet lämnar rest 3 vid division med 4. Talets tre sista siffror är 599, och

$$599 = 74 \cdot 8 + 7,$$

som innebär att talet lämnar rest 7 vid division med 8. Talets siffersumma kontrolleras vara 100, som i sin tur har siffersumma 1. Därmed ser vi att talet lämnar rest 1 vid division med både 3 och 9.

4. Vi letar efter ett heltal n så att

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2} &\approx 871 \\ \Rightarrow n^2 &\approx 2 \times 871 \\ \Rightarrow n^2 &\approx 1742 \\ \Rightarrow n &\approx \sqrt{1742}. \end{aligned}$$

Men $41 \cdot 41 = 1681$ och $42 \cdot 42 = 1764$ så vi får att $n \approx 41$. Den exakta formeln för det n:te triangeltalet ges av

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

Sätter vi in $n = 41$ så får vi att det 41:te triangeltalet är $\frac{41 \cdot 42}{2} = 41 \cdot 21 = 861$, som är lite för liten. Det 42:e triangeltalet är därmed $861 + 42 = 903$. Eftersom

$$903 - 871 = 32 > 10 = 871 - 861,$$

så är det det 41:e triangeltalet som ligger närmast 871.

5 (i) Inget av talen 27, 57 och 87 är ett primtal eftersom de ligger allihop i 3:ans tabell (kolla siffersumman t.ex. !). 77 är inget primtal ty $77 = 7 \cdot 11$. Alla andra talen mindre än 100 som slutar på en 7:a är primtal, dvs 7,17,37,47,67 och 97.

(ii) Om ett tal lämnar rest 2 vid division med 4 så innebär det att det är ett tal på formen

'någonting i 4:ans tabell' + 2.

Ett tal i 4:ans tabell ligger också i 2:ans tabell. Plussar vi till 2, så stannar vi kvar i 2:ans tabell.

Därmed har vi visat att varje tal som lämnar rest 2 vid division med 4 ligger i 2:ans tabell, dvs är ett jämnt tal. Och det enda jämna primtalet är 2, som visst lämnar rest 2 vid division med 4 ($2 = 0 \cdot 4 + 2$). Svaret är alltså att 2 är det enda primtal som uppfyller villkoret.

6 (i)

$$117 \times 138 = 115 \times 140 = 2 \cdot (138 - 115) = 2 \cdot 23 = 46. \tag{1}$$

Vi kan förklara (1) på följande vis : vi tolkar 117×138 som en uppsättning av bollar där vi har 117 grupper av bollar med 138 st. i varje. Tar man bort två grupper då har man $2 \cdot 138$ bollar mindre. Nu har man 115 grupper med 138 st. i varje. Lägger man till två bollar till varje grupp så har man $2 \cdot 115$ extra bollar. Nu har man 115 grupper med 140 i varje, som blir vår tolkning av talet 115×140.

Eftersom vi har i slutet 46 bollar mindre än i början (vi har tagit bort $2 \cdot 138 = 276$ st. och lagt till $2 \cdot 115 = 230$ st.) så har vi lyckats förklara (1).

(ii) Vi har följande grova uppskattning :

$$3^{920} = (3^2)^{460} = 9^{460} \approx 10^{460}.$$

Detta sista tal har 461 decimalsiffror, så det står klart att alternativ (b) måste vara korrekt.

7 (i) Man kan tänka sig att man har en uppsättning av bollar i ett udda antal grupper, med ett udda antal i varje grupp. Parar man ihop bollarna i varje grupp så blir det en över från varje grupp. Parar man ihop dessa kvarstående bollarna så blir det en över igen ty vi hade ett udda antal grupper.

Att bollarna kan paras ihop så att det blir en över betyder att det totala antalet bollar är udda, v.s.v.

(ii) Jag påstår att x^2 ligger i 4:ans tabell. Det finns många olika sätt att förklara detta - här följer ett sätt :

Att x ligger i 2:ans tabell betyder att jag kan dela ut x kakor till 2 barn så att de får lika många. Jag måste nu visa att det går att dela ut x^2 kakor till 4 barn så att de får lika många. Kalla de 4 barnen för A,B,C och D. Eftersom $x^2 = x \cdot x$ per definition, så kan vi dela ut de x^2 kakorna 'stegvis', nämligen vi kör x omgångar och delar ut x kakor i varje omgång. För att se till att alla barnen får lika många kakor så delar vi upp kakorna mellan A och B i omgång 1, mellan C och D i omgång 2, mellan A och B i omgång 3, mellan C och D i omgång 4, o.s.v. Att x är ett jämt tal innebär just att det blir lika många omgångar där A och B får kakor som där C och D får dem.