Tentamenskrivning i LNM 100 (Delkurs 3, Aritmetik)

Lösningar

1. För att både kakorna och tårtorna ska kunna fördelas rättvist så måste antalet barn vara ett tal som delar både 840 och 483. Först hittar vi det störts sådana tal, det s.k. SGD av 840 och 483.

Metod 1 : Euklides algoritm

$$\begin{aligned} 840 &= 1 \cdot 483 + 357 \\ 483 &= 1 \cdot 357 + 126 \\ 357 &= 2 \cdot 126 + 105 \\ 126 &= 1 \cdot 105 + 21 \\ 105 &= 5 \cdot 21 + 0, \end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(840, 483) = 21$.

Metod 2 : Primtalsfaktorisering

Vi har att

$840 = 2 \cdot 420 = 2 \cdot 2 \cdot 210 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 105 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$

och

$$483 = 3 \cdot 161 = 3 \cdot 7 \cdot 23.$$

Därmed har talen en 3:a och en 7:a gemensamt i deras primtalsfaktoriseringar, som bekräftar att $\mathrm{SGD}(840, 483) = 3 \cdot 7 = 21$.

Därmed är 21 det största antalet barn som passar. Talen 1,3,7 och 21 delar 21 och dessa utgör alla alternativen för antalet barn.

2. De tal upp till 100 som lämnar resten 2 vid division med 7 är

$$2 \;\; 9 \;\; 16 \;\; 23 \;\; 30 \;\; 37 \;\; 44 \;\; 51 \;\; 58 \;\; 65 \;\; 72 \;\; 79 \;\; 86 \;\; 93.$$

Av dessa så är 2 så klart ett primtal. Talen 16, 30, 44, 58, 72 0ch 86 är allihop delbara med 2, och därmed inga primtal. Av de resterande talen så är både 9, 51 och 93 delbara med 3, medan att 65 är delbart med 5.

Därmed har vi fyra st primtal, nämligen 2,23,37 och 79.

3. Talen i en viss kolonn lämnar alla samma rest vid division med 12 : mer precis, talen i kolonn 1 lämnar rest 1, talen i kolonn 2 lämnar rest 2, o.s.v., och talen i den sista kolonnen lämnar rest 0.

Enligt Dirichlets sats så finns det oändligt många primtal som lämnar resten x vid division med 12 om och endast om $\text{SGD}(x, 12) = 1$. Bland talen från 0 till 11 är det just 1,5,7 och 11 vars SGD med 11 är lika med 1. Så de motsvarande kolonnerna innehåller var för sig oändligt många primtal.

Då har vi kvar kolonner 2,3,4,6,8,9,10 och 12. Alla talen i kolonner 2,4,6,8,10 och 12 ligger i 2:ans tabell så det finns bara ett primtal bland dem, nämligen 2, som ligger i kolonn 2. Alla talen i kolonner 3 och 9 ligger i 3:ans tabell så det finns också precis ett primtal bland dem, nämligen 3, som ligger i kolonn 3.

4. Om x går att dela med 6, så går $x \cdot x \cdot x$ att dela med $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, som är svaret.