

Komplettering till Uppgift 5

På föreläsningen kom vi fram till att det n :te triangeltalet ges av

$$\frac{n^2 - n}{2} + n. \quad (1)$$

I era skriftliga inlämningar ska ni förklara var (1) kommer ifrån. Här vill jag visa likheten

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad (2)$$

Detta är ren algebra, som jag nu visar i detalj. Man börjar med att ta en gemensam nämnare på VL av (2) så får man att

$$\frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 - n}{2} + \frac{2n}{2}.$$

Detta i sin tur blir

$$\begin{aligned} & \frac{(n^2 - n) + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n(n + 1)}{2}, \end{aligned}$$

v.s.v. Man kan också räkna ett exempel. Tag $n = 3$, då kan vi räkna så här

$$\begin{aligned} & \frac{3^2 - 3}{2} + 3 \\ &= \frac{3^2 - 3}{2} + \frac{6}{2} \\ &= \frac{(3^2 - 3) + 6}{2} \\ &= \frac{3^2 + 3}{2} \\ &= \frac{3(3 + 1)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 4}{2}, \end{aligned}$$

v.s.v.

Alternativa förklaringar (optional)

Jag känner minst två alternativa sätt att förklara formeln $n(n+1)/2$, som jag nu presenterar.

METOD 1 (GAUß) :

‘As the story goes’, det är följande metod som den kända tyska matematikern Carl Friedrich Gauß hittade på i skolan som 9-åring !

Det n :te triangeltalet är

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Två gånger talet ges då helt naturligt av

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n). \quad (3)$$

Vi kan skriva om (3) på ett smart sätt, nämligen

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n & + \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \end{array}$$

Om man nu plussar ihop så ser man att varje kolonn bidrar med $n+1$. Och det finns n st. kolonner. Detta betyder att den totala summan blir

$$n(n+1).$$

Och som vi sa ovan är detta lika med två gånger det n :te triangeltalet. Därför måste det n :te triangeltalet vara hälften av detta, nämligen

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

v.s.v.

METOD 2 (INDUKTIV RESONEMANG) :

Denna metod är mer ‘algebraisk’ och något mer abstrakt kanske. Det första triangeltalet är ju 1. Då stämmer vår formel för $n=1$ ty

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Antag nu att man har kollat att formeln stämmer för det n :te triangeltalet, dvs man tar för givet att

$$n\text{:te triangeltalet} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Det gäller nu att deducera att formeln stämmer också för nästa triangelantal. Dvs, vi måste visa att

$$(n+1)\text{:te triangelantal} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Vad är skillnaden mellan det $(n+1)$:te och det n :te triangeltalet ? Det är $n+1$ så klart. Därför räcker det att visa att

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n+1.$$

Och detta är ren algebra igen. Man kan manipulera VL på följande sätt : 2 är en gemensam nämnare, så man kan skriva VL som ett enda bråktal, nämligen

$$\frac{(n+1)(n+2) - n(n+1)}{2}.$$

I täljaren är nu $(n+1)$ en gemensam faktor så vi kan skriva om bråket som

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1) \cdot [(n+2) - n]}{2} \\ &= \frac{(n+1) \cdot 2}{2} \\ &= n+1, \end{aligned}$$

v.s.v.