Komplettering till Uppgift 5

På föreläsningen kom vi fram till att det n:te triangeltalet ges av

$$\frac{n^2-n}{2}+n. \tag{1}$$

I era skriftliga inlämningar ska ni förklara var (1) kommer ifrån. Här vill jag visa likheten

$$\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

Detta är ren algebra, som jag nu visar i detalj. Man börjar med att ta en gemensam nämnare på VL av (2) så får man att

$$\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2-n}{2}+\frac{2n}{2}.$$

Detta i sin tur blir

$$\begin{aligned}\frac{(n^2-n)+2n}{2}\\ =\frac{n^2+n}{2}\\ =\frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

v.s.v. Man kan också räkna ett exempel. Tag $n=3$, då kan vi räkna så här

$$\begin{aligned}\frac{3^2-3}{2}+3\\ =\frac{3^2-3}{2}+\frac{6}{2}\\ =\frac{(3^2-3)+6}{2}\\ =\frac{3^2+3}{2}\\ =\frac{3(3+1)}{2}\\ =\frac{3\cdot 4}{2},\end{aligned}$$

v.s.v.

Alternativa förklaringar (optional)

Jag känner minst två alternativa sätt att förklara formeln $n(n+1)/2$, som jag nu presenterar.

Metod 1 (Gauβ) :

'As the story goes', det är följande metod som den kända tyska matematikern Carl Friedrich Gauβ hittade på i skolan som 9-åring !

Det n:te triangeltalet är

$$1+2+3+\cdots+n.$$

Två gånger talet ges då helt naturligt av

$$(1+2+3+\cdots+n)+(1+2+3+\cdots+n). \tag{3}$$

Vi kan skriva om (3) på ett smart sätt, nämligen

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n & + \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & \end{array}$$

Om man nu plussar ihop så ser man att varje kolonn bidrar med $n+1$. Och det finns n st. kolonner. Detta betyder att den totala summan blir

$$n(n+1).$$

Och som vi sa ovan är detta lika med två gånger det n:te triangeltalet. Därför måste det n:te triangeltalet vara hälften av detta, nämligen

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

v.s.v.

Metod 2 (Induktiv resonemang) :

Denna metod är mer 'algebraisk' och något mer abstrakt kanske. Det första triangeltalet är ju 1. Då stämmer vår formel för $n=1$ ty

$$\frac{1(1+1)}{2}=1.$$

Antag nu att man har kollat att formeln stämmer för det n:te triangeltalet, dvs man tar för givet att

$$n\text{:te triangeltalet} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Det gäller nu att deducera att formeln stämmer också för nästa triangeltal. Dvs, vi måste visa att

$$(n+1)\text{:te triangeltal} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Vad är skillnaden mellan det $(n+1)$:te och det n:te triangeltalet ? Det är $n+1$ så klart. Därför räcker det att visa att

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n+1.$$

Och detta är ren algebra igen. Man kan manipulera VL på följande sätt : 2 är en gemensam nämnare, så man kan skriva VL som ett enda bråktal, nämligen

$$\frac{(n+1)(n+2) - n(n+1)}{2}.$$

I täljaren är nu $(n+1)$ en gemensam faktor så vi kan skriva om bråket som

$$\begin{aligned} &\frac{(n+1)\cdot[(n+2)-n]}{2} \\ &= \frac{(n+1)\cdot 2}{2} \\ &= n+1, \end{aligned}$$

v.s.v.