LNM 100 VT-05 : Fler extrauppgifter

1 (i) För var och ett av följande värdena av talet N ange en lista över alla fyrkantiga formerna som kan skapas utav N identiska kvadratiska plattor och har följande utssende : ett fyrkantigt hål omringat av ett enda lager med plattor. Rita upp två av fyrkanterna i varje fall.

$$N = 14, \qquad N = 22 \qquad N = 36, \qquad N = 225.$$

***(ii)** Ange en allmän formel för antalet olika former man kan göra med N plattor, och förklara formeln på bästa sätt du kan.

2. Vad är den största arean man kan omringa med 30 cm snöre ?

***3.** Visa att för en cirkel och en kvadrat med samma omkrets så gäller alltid att

$$\frac{\text{Cirkelns area}}{\text{Kvadratens area}} = \frac{4}{\pi}.$$

4. Ange svaren till följande uppgifter i termer av potenser :

(i) Sveriges befolkning är nu 9 miljoner. Om befolkningen skulle öka med 3 procent årligen under kommande 50 åren, vad skulle befolkningen vara år 2055 ?
(ii) Idag kostar det 12 kr att parkera bilen utanför Pedagogen under en hel dag. Inflationen ligger på cirka 2 procent per år. Om det skulle fortsätta så i 20 år, hur mycket skulle det kosta då att parkera bilen ?
(iii) Annika och Bertil har 100000 kr var att investera. Ann-Britt satsar på aktier där börsen har visat en uppgång med 6 procent årligen i snitt under senaste halvseklet. Bertil satsar på fastigheter där marknaden har vuxit med 7 procent årligen i snitt under senaste halvseklet. Om trenderna skulle hålla i sig, hur mycket rikare skulle Bertil vara än Ann-Britt om 50 år ?
(iv) På hur många sätt kan man fylla i en tipskupong (13 rader) med bara 1:or och X:ar ?
(v) Hur många 8-siffriga tal innehåller bara udda siffror ?
(vi) Hur många olika tal har högst 20 siffror i bas 7 ?
(vii) Hur många möjliga utgångar finns det om 15 tärningar kastas ?

5. Vi har sett att man kan ta fram 40 olika positiva tal genom att kombinera talen 1,3,9 och 27. Ge olika exempel på grupper av fyra tal från vilka man

kan ta fram 40 olika positiva tal.

***6.** Förklara varför det går aldrig att ta fram fler än 40 olika tal genom att kombinera fyra st.

7. Om en viss rad i Pascals triangel ser ut så här

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

hur ser nästa rad ut då?

8. Var i Pascals triangel ska man leta efter följande antal (indikera vilken rad och vilken position i raden) :

(a) antalet sätt att få 9 kronor när man kastar 23 mynt.
(b) antalet sätt att fylla i ett lotterikort där man ska välja 7 st. bland talen 1,2,...,55.
(c) antalet sätt att välja vilka 11 spelare i en trupp bestående av 22 spelare ska starta en fotbollsmatch.
(d) antalet sätt att välja vilka 3 kurser man ska läsa nästa termin om det finns 8 olika kurser i utbudet.

9. Gör en lista över alla sätt att få k st kronor när man kastar n st mynt, då

(a) $n = 4$, $k = 2$,
(b) $n = 5$, $k = 1$,
(c) $n = 5$, $k = 2$,
(d) $n = 5$, $k = 3$,
(e) $n = 6$, $k = 3$.

10. Samma uppgift som nr. 9, men denna gång ska du göra en lista över alla sätt att välja k st tal bland talen $1, 2, ..., n$ för att fylla i ett lotterikort.

****11.** Låt $C(n, k)$ beteckna antalet sätt att få k st kronor när man kastar n st mynt. Förklara varför talen $C(n, k)$ har samma relation till varandra som talen i Pascals triangel (och därmed är samma tal), dvs varför

$$C(n, k) = C(n - 1, k) + C(n - 1, k - 1).$$

***12.** Samma uppgift som nr 11, men mer konkret : förklara varför

$$C(7, 3) = C(6, 3) + C(6, 2).$$

***13** Förklara varför $C(n, 2)$ är det n:te triangeltalet. M.a.o. förklara varför antalet sätt att få 2 kronor när man kastar ett visst antal mynt är lika med motsvarande triangeltalet.

14 (a) Hur många olika tal går jämnt in i talet vars primtalsfaktorisering är

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 13.$$

(b) En restaurangmeny bjuder på 6 olika förrätter, 9 olika huvudrätter och 8 olika efterrätter. I hur många dagar kan man äta en hel middag (f.r. + h.r. + e.r) på denna restaurang utan att beställa exakt samma middag två gånger ?
(c) Lärarkåren på en viss gymnsieskola består av 11 män och 12 kvinnor. En kommité bestående av 2 personer ska utses. Skolans jamställdhetspolicy kräver att kommitéen innehåller en man och en kvinna. Hur många möjligheter lämnar detta för kommitéen ?
(d) Om kommitéen ovan ska också ha en represnentant från elevkåren, och det finns 15 elever beredda att ställa upp, hur många möjligheter har vi då för hela kommitéen ?
***(e)** Samma uppgift som **(c)**, men denna gång ska kommitéen bestå av 4 personer, två män och två kvinnor (Tips : Använd resultatet av uppgift 13).