LNM 100 : Tentamen 130505

Lösningar

1. Vi har följande primtalsfaktorisering av talet 32760 :

$$\begin{aligned}32760 = 2 \cdot 16380 = 2^2 \cdot 8190 = 2^3 \cdot 4095 = 2^3 \cdot 5 \cdot 819 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 273 \\ = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 91 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13,\end{aligned}$$

dvs

$$32760 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

(i) De alternativ man har för antalet barn är just de tal som går jämnt in i 32760. Enligt multiplikationsprincipen, så finns det

$$(3+1) \times (2+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$$

sådana tal.

(ii) De 10 minsta tal som går jämnt in i 32760, m.a.o. de 10 minsta tal som uppstår som kombinationer av dess primtalsfaktorer, är just

$$1,\ 2,\ 3,\ 4(= 2 \cdot 2),\ 5,\ 6(= 2 \cdot 3),\ 7,\ 8(= 2 \cdot 2 \cdot 2),\ 9(= 3 \cdot 3),\ \text{och } 10(= 2 \cdot 5).$$

2. Först gäller det att ta fram det minsta tal som går att mäta upp, dvs $\mathrm{SGD}(840, 483)$. Man kan göra detta m.h.a. Euklides algoritm :

$$\begin{aligned}840 &= 1 \cdot 483 + 357 \\ 483 &= 1 \cdot 357 + 126 \\ 357 &= 2 \cdot 126 + 105 \\ 126 &= 1 \cdot 105 + 21 \\ 105 &= 5 \cdot 21 + 0.\end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(840, 483) = 21$. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för de bägge talen :

$$\begin{aligned}840 = 2 \cdot 420 = 2 \cdot 2 \cdot 210 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 105 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \\ 483 = 3 \cdot 161 = 3 \cdot 7 \cdot 23,\end{aligned}$$

från vilka vi också ser att $\mathrm{SGD}(840, 483) = 3 \cdot 7 = 21$.

Därmed är 21 det minsta antal liter som kan mätas upp och inget av talen mellan 1 och 8 kan mätas upp.

3. Med tanke på att $3167 \times 2 = 6334$ och att $80 \times 80 = 6400$, så bör det 80:e t-talet ligga i närheten. Det 80:e t-talet ges exakt av

$$\frac{80 \times 81}{2} = 3240.$$

Detta är alltså något för stort. Det 79:e t-talet fås genom att subtrahera 80, och är därmed lika med $3240 - 80 = 3160$. Detta är mindre än 3167 och betydligt närmare än 3240.

Svaret är alltså att det är det 79:e t-talet som ligger närmast 3167.

4. Om vi börjar med talet 199×141 så kan talet visualiseras som en uppsättning av 199 grupper av bollar med 141 st i varje. Tar vi bort två bollar från varje grupp så har vi 199 grupper med 139 i varje. Lägger vi till två nya sådana grupper, så har vi 201 grupper med 139 i varje, och därmed 201×139 bollar totalt.

Sammanlagt så har vi tagit bort $2 \cdot 199$ bollar, och lagt till $2 \cdot 139$ bollar. Totalt så har vi därmed tagit bort $2{\cdot}199 - 2{\cdot}139 = 3{\cdot}(199-139) = 2{\cdot}60 = 120$ bollar, som innebär att

$$199 \times 141 - 201 \times 139 = 120.$$

5 (i) Man har 26 val för var och en av bokstäverna och 10 val för var och en av siffrorna. Enligt multiplikationsprincipen så ges antalet lösenord av $26^4 \cdot 10^4 = (26 \cdot 10)^4 = 260^4$.

(ii) Det som är egentligen givet är att $C(7,3) = 35$. Och det vi söker är egentligen $C(8,4)$. Vi har att $C(8,4) = C(7,3) + C(7,4)$. Men $C(7,4) = C(7,3)$ ty att välja tre dagar av sju är samma sak som att välja bort fyra dagar av sju.

Därmed har vi att $C(8,4) = 35 + 35 = 70$.

6. Om n inte är ett primtal så finns det heltal a, b med

$$n = a \cdot b \tag{1}$$

så att $1 < a < n$ och $1 < b < n$. Men minst ett av a och b måste vara mindre än eller lika med $\sqrt{n}$, ty annars så skulle $a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, som säger emot (1).

7 (i) Utgångspositionen är $(9, 11)$. Man borde antingen gå diagonalt till $(4, 6)$ eller rakt upp till $(7, 11)$.
(ii) Rutorna längs denna diagonal ges av $(x, x + 11)$ där x löper över alla positiva heltalen. Vi söker alltså en B-gynnande position av denna form, och den är positionen $(18, 29)$. Man måste alltså gå ner till den 18:e raden för att hitta en position som gynnar B.