LNM 100 : Tentamen 150405

Lösningar

1. De alternativ man har för antalet barn är just de tal som går jämnt in i både 696 och 294. Först gäller det att ta fram det största sådana tal, dvs $\mathrm{SGD}(696, 294)$. Man kan göra detta m.h.a. Euklides algoritm :

$$\begin{aligned}
696 &= 2 \cdot 294 + 108 \\
294 &= 2 \cdot 108 + 78 \\
108 &= 1 \cdot 78 + 30 \\
78 &= 2 \cdot 30 + 18 \\
30 &= 1 \cdot 18 + 12 \\
18 &= 1 \cdot 12 + 6 \\
12 &= 2 \cdot 6 + 0,
\end{aligned}$$

som innebär att $\mathrm{SGD}(696, 294) = 6$. Alternativt så kan man jämföra primtalsfaktoriseringarna för de bägge talen :

$$\begin{aligned}
696 = 2 \cdot 348 = 2 \cdot 2 \cdot 174 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 87 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 29, \\
294 = 2 \cdot 147 = 2 \cdot 3 \cdot 49 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7,
\end{aligned}$$

från vilka vi också ser att $\mathrm{SGD}(696, 294) = 2 \cdot 3 = 6$.

De alternativ vi har för antalet barn är därmed alla talen som går jämnt in i 6, nämligen 1,2,3 eller 6 barn.

2. Vi börjar med att ta reda på vilket triangeltal ligger närmast 1817. Med tanke på att $1817 \times 2 = 3634$ och att $60 \times 60 = 3600$, så bör det 60:e t-talet ligga i närheten. Det 60:e t-talet ges exakt av

$$\frac{60 \times 61}{2} = 1830.$$

Detta är alltså det första t-talet i det givna intervallet. Det 61:a t-talet är $1830 + 61 = 1891$, som också ligger i intervallet. Det 62:a t-talet är $1891 + 62 = 1953$ som gör detsamma. Det 63:e t-talet är $1953 + 63 = 2016$, som ligger utanför.

Svaret är alltså att det finns 3 st triangeltal mellan 1817 och 1960, nämligen 1830, 1891 och 1953, som är de 60:e, 61:a och 62:a t-talen respektivt.

3. Om vi börjar med talet 177×145 så kan talet visualiseras som en uppsättning av 177 grupper av bollar med 145 st i varje. Tar vi bort tre bollar från varje grupp så har vi 177 grupper med 142 i varje. Lägger vi till tre nya sådana grupper, så har vi 180 grupper med 142 i varje, och därmed 180×142 bollar totalt.

Sammanlagt så har vi tagit bort $3 \cdot 177$ bollar, och lagt till $3 \cdot 142$ bollar. Totalt så har vi därmed tagit bort $3{\cdot}177-3{\cdot}142 = 3{\cdot}(177-142) = 3{\cdot}35 = 105$ bollar, som innebär att

$$177 \times 145 - 180 \times 142 = 105.$$

4 (i) $C(15,7) = 6435$ olika sätt.
(ii) $C(13,5) = 1287$ olika händer.
(iii) $C(17,4) = C(16,3) + C(16,4) = 560 + 1820 = 2380$ olika sätt.

5. Man kan väga upp 121 olika vikter som bäst. Detta pga att man kan kan göra $3^5 = 243 = 2 \cdot 121 + 1$ olika kombinationer av 5 givna tal, av vilka

(i) minst en kombination måste bli talet noll (man tar med inget av talen i kombinationen) och

(ii) det blir lika många kombinationer som ger ett positivt och ett negativt resultat (genom att byta ut $+$ och $-$).

Anledningen till att det finns 3^5 kombinationer totalt är att vi har tre val för var och ett av de fem talen :

(a) tag med det i kombinationen med ett $+$ tecken
(b) tag med det i kombinationen med ett $-$ tecken
(c) tag inte med det i kombinationen.

6 (i) 3^{366}.
(ii) Först måste vi ta fram talets primtalsfaktorisering. OBS! att du behöver inte räkna ut själva talet för att göra detta. Du kan nämligen ta fram primtalsfaktoriseringarna för var och ett av 630 och 912 och sätta ihop dem. M.a.o. vi först konstaterar att

$$630 = 2 \cdot 315 = 2 \cdot 3 \cdot 105 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$912 = 2 \cdot 456 = 2 \cdot 2 \cdot 228 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 114 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 57 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19,$$

och därmed kan dra slutsatsen att primtalsfaktoriseringen av 630×912 ges av

$$630 \times 912 = (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \times (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19.$$

Antalet tal som går jämnt in i talet ovan är nu, enligt multiplikationsprincipen,

$$6 \times 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 192 \text{ olika tal.}$$

7 (i) Utgångspositionen är $(15, 11)$. Man borde antingen gå diagonalt till $(11, 7)$ eller rakt upp till $(7, 11)$.
(ii) Rutorna längs denna diagonal ges av $(x, x+9)$ där x löper över alla positiva heltalen. Vi söker alltså en B-gynnande position av denna form, och den är positionen $(15, 24)$. Man måste alltså gå ner till den 15:e raden för att hitta en position som gynnar B.