MATEMATIK	Dag : 020103 Tid : 8.45 - 13.45.
Göteborgs Universitet	Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty	Vakt : Yan Yubin 0740-350646.

Tentamenskriving i Algebra, del 1 (MAN 010)

$\geq$ 12 poäng, inkl. bonus från inlämningsuppgiften och grupparbeten, ger godkännt. $\geq$ 18 poäng ger väl-godkännt. Dessa gränser kan minskas efteråt.

1 (3p) Ett ORDNAT trippel $\{a, b, c\}$ av heltal sägs utgöra en *aritmetisk följd (AF)* om $b - a = c - b$.

Låt nu n vara ett jämnt, positivt heltal. Ange en formel för antalet AF:er som består av tal bland $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

2 (1p+2p) Betrakta en 'Robinson tävling', som börjar med 6 män och 6 kvinnor, och där en person ska elimineras under varen av följande 11 veckor. På hur många olika sätt kan eliminationen ske om

(i) den sker fritt,
(ii) första veckan, sker den fritt. Därefter måste män och kvinnor elimineras under alternerande veckor tills att det blir en man och en kvinna kvar. Då sker den sista eliminationen efter en tävling dem emellan.

3 (3p) Minst en av rötterna till polynomet

$$p(z) := z^5 + z^4 + 14z^3 + 8z^2 - 32z - 128$$

är rent imaginär. Med hjälp av detta, lös ekvationen $p(z) = 0$ fullständigt.

4 (0.4p+2.6p) **(i)** Låt a, b vara positiva heltal. Definiera $\mathrm{SGD}(a, b)$.

(ii) Bevisa att $\mathrm{SGD}(a, b)$ existerar och är unik.

5 (2.5p+1.5p) **(i)** Låt G vara en grupp. Antag att $x^2 = e$ för varje $x \in G$. Visa att G är abelsk.

(ii) Ge ett exempel av en icke-abelsk grupp G där $x^4 = e$ för varje $x \in G$.

6 (1.5p+1.5p) (i) Låt z, w vara komplexa tal. Bevisa att

$$|zw| = |z| \cdot |w|.$$

(ii) Låt ϕ beteckna Eulers phi-funktion. Beräkna $\phi(1000)$ utan att göra en lista av de heltal som är relativt prima med 1000.

7 (3p) Låt p, q, r vara tre olika primtal. Formulera och bevisa den Kinesiska rest satsen för ett system av 3 st. kongruenser modulo, respektivt, p, q och r.

8 (3p) Det är en berömd sats av Lagrange att varje naturligt tal n kan skrivas som summan av kvadraterna av 4 eller färre heltal. Bevisa att det finns oändligt många naturliga tal som inte går att skriva som summan av 4 eller färre fjärdepotenser.

(Ledning: tänk modulo 16.)

Obs! Tentan beräknas vara färdigrättad den 26 augusti. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.