MATEMATIK	Dag : 010407 Tid : 8.45 - 13.45.
Göteborgs Universitet	Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty	Vakt : Sebastian Sandberg 0740-350646.

Tentamenskriving i Algebraisk talteori (MAN 640)

Obs! I uppgifter nr. 2,3,4,6,7 betyder ett 'bevis' att om du använder något resultat från föreläsningarna, då måste det bevisas. I uppgifter nr. 1,5,8 kan resultat från föreläsningarna användas utan bevis (om de behövs !). I uppgift nr. 3 kan standardfakta från t.ex. flervariabelanalys användas utan bevis.

$\geq$ 12 poäng, inkl. bonus från inlämningsuppgifterna, ger godkännt. Denna gräns kan minskas efteråt.

1 (3p). Bevisa en sats som anger, för varje positivt heltal n, det unika $k_n \in \{0, 1, ..., n-1\}$ så att

$$(n-1)! \equiv k_n \pmod{n}.$$

2 (3p). Bevisa att det finns oändligt många rationella tal $\frac{p}{q}$ så att

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

3 (1.5p + 1.5p). **(i)** Bevisa att, för $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

där μ är Möbiusfunktionen.

(ii) Det är känd att $\zeta(s)$ kan fortsättas till en meromorfisk funktion i hela det komplexa planet och att det finns s_0 med $\mathrm{Re}(s_0) = 1/2$ så att $\zeta(s_0) = 0$.

Med detta i hand decucera (eller bevisa på något annat sätt) att funktionen $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, där

$$f(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu(n)}{\sqrt[4]{n}}$$

är obegränsad.

4 (2p+1p). **(i)** Skriv ner och bevisa Gauβ' lemma. Förklara noggrant all terminologi.
(ii) Bevisa att, för varje udda primtal p,

$$x^2 \equiv 2 \pmod p \text{ lösbar} \Leftrightarrow p \equiv \pm 1 \pmod 8.$$

5 (1.5p+2.5p). **(i)** Ange, om det så finns, en reducerad binär kvadratisk form f av diskriminant 185 som representerar 17 och ett explicit par x, y av heltal så att $f(x, y) = 17$.
(ii) Ange en binär form som representerar varje positivt heltal, eller bevisa att det inte finns en sådan form.

6 (3p). Låt K vara en algebraisk talkropp. Bevisa att heltalsringen O_K är en fri abelsk grupp av rang $[K : \mathbf{Q}]$.

7 (2p+1p). **(i)** Bevisa att varje positiv heltal är en summa av högst fyra kvadrater av positiva heltal.
(ii) Beskriv (med bevis) en oändlig mängd av positiva heltal som inte kan representeras som summan av högst tre kvadrater av positiva heltal.

8 (0.3p+2.7p). **(i)** Definiera termerna *Noetersk ring*, *lokal ring.*
(ii) Ge ett exempel av var och en av följande

(a) en Noetersk ring A med exakt 11 maximala idéal.
(b) en icke-Noetersk lokal ring A.
(c) en Noetersk ring A som har en oändlig avtagande kedja av idéal.

Som 'bevis' räcker följande

(a) skriv ner A och lista de 11 maximala idéalen.
(b) skriv ner A.
(c) skriv ner A och beskriv (utan bevis) en oändlig avtagande kedja av idéal.

Obs! Tentan beräknas vara färdigrättad den 17 april (jag är borta under påsklovet). Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.

Notera vidare att jag åker bort igen den 18 april, så det är viktigt att du hämtar din tenta den 17 i fall du har frågor.