MATEMATIK | Dag : 010127 Tid : 8.45 - 13.45.
Göteborgs Universitet | Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty | Vakt : Fredrik Engström 0740-350646.

Tentamenskriving i Algebraisk talteori (MAN 640)

Obs! I uppgifter nr. 2,4,6,8 betyder ett 'bevis' att om du använder något resultat från föreläsningarna, då måste det bevisas. I uppgifter nr. 1,3,5,7 kan resultat från föreläsningarna används utan bevis (om de behövs !). I uppgift nr. 2 kan standardfakta från t.ex. flervariabelanalys användas utan bevis.

≥ 12 poäng, inkl. bonus från inlämningsuppgifterna, ger godkännt. Denna gräns kan minskas efteråt.

1 (3p). Hur många primtal p satisfierar alla 4 följande kongruenser ? Bevisa ditt svar.

$$p \equiv 1 \pmod 3,$$
$$p \equiv 2 \pmod 5,$$
$$p \equiv 3 \pmod 7,$$
$$p \equiv 4 \pmod{11}.$$

2 (2p+1p). **(i)** För $\mathrm{Re}(s) > 1$, sätt $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} 1/n^s$. Bevisa att detta definierar en analytisk funktion som kan fortsättas till en meromorfisk funktion i $\mathrm{Re}(s) > 0$ med en enda enkel pol i $s = 1$, där resten är 1.
(ii) Beräkna (med bevis)

$$\prod_{p \text{ primtal}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

3 (0.2p+2.8p). **(i)** Låt $f = \{a, b, c\}$ vara en binär kvadratisk form med heltalskoefficienter. Säg vad det menar för f att vara *reducerad.*
(ii) För var och en av primtalen $p = 23, 31$, säg om det finns en reducerad form av diskriminant 265 som representerar p. I så fall, ange en explicit reducerad form f av diskriminant 265, och ett explicit par x, y av heltal

så att $f(x,y) = p$.

4 (0.5p+2.5p). **(i)** Skriv ner Gauβ' lemma. Förklara noggrant all terminologi. Bevisa INTE lemmat !
(ii) Skriv ner Gauβ' reciprocitets lag, och bevisa den med hjälp av hans lemma, eller på något annat sätt.

5 (1p+2p). **(i)** Låt $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3})$. Vad är $[K : \mathbf{Q}]$? Bevisa ditt svar.
(ii) Bevisa att det finns $a \in \mathbf{Q}$ så att

$$\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2} + a\sqrt[4]{3}) = K,$$

och ange ett sådant a (det finns många val !).

6 (3p). Bevisa att de algebraiska talen utgör en kropp och att denna kropp är algebraiskt sluten.

7 (3p). Faktorisera huvudidéalet $< 5 + 2\sqrt{-13} >$ i $\mathbf{Z}[\sqrt{-13}]$.

8 (3p+1p). **(i)** Hur många lösningar $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ har ekvationen $x^2 - 2001y^2 = -1997$? Bevisa ditt svar.
(ii) Beskriv explicit alla lösningarna $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ till ekvationen $x^2 - 2y^2 = -1$. Ett bevis behövs INTE !

Obs! Tentan beräknas vara färdigrättad den 30 januari. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.