MATEMATIK Dag : 060114 Tid : 08.30 - 13.00.
Chalmers Tekniska Högskola Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty Vakt : Tobias Gebäck 0762-721860.

Tentamenskriving i Diskret Matematik (TMA 055)

26 poäng på denna tenta och 50 poäng totalt, inkl. poängen från inlämningsuppgifterna, ger godkännt.

1 (11p) Ange den allmänna lösningen och den minsta positiva lösningen till följande system av kongruenser :

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 2 \pmod{11} \\ 8x &\equiv 3 \pmod{15} \\ 3x &\equiv 1 \pmod{16} \end{aligned}$$

2 (11p) Lös fullständigt recurrence relationen

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2,$$
$$u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2} + n, \quad \forall\, n \geq 2.$$

3 (11p) Ange resten vid division med 99 som lämnas av

$$(5^{183} + 17^{121})^{59}.$$

4 (5p+6p) Man hänvisas till grafen i Fig. 1.

(i) Ange (med bevis) $\chi(G)$ och en explicit optimal färgläggning av G.

(ii) Tillämpa Dijkstras algoritm för att hitta en kortaste väg mellan v och w (Obs! Skriv ner vilken kant du väljer i varje steg).

5 (7p+8p+7p) (i) Om en tärning kastas 20 gånger, vad är sannolikheten att 1 visas 4 ggr och att 2 och 3 visas sammanlagt 6 ggr ?

(Obs! Du behöver inte räkna ut svaret som ett decimaltal).

(ii) Genom att betrakta talföljden

$$2^1 + 1, 2^2 + 1, 2^4 + 1, 2^8 + 1, 2^{16} + 1, 2^{32} + 1, ...$$

bevisa att det finns oändligt många primtal.

(Obs! Det finns förstås andra sätt att bevisa samma sak (t.ex. Euklides ursprungliga bevis) men du får inga poäng för att ta upp sådana alternativa metoder).

(iii) *Girth* av en enkel graf är längden av dess kortaste cykel (en skog sägs ha oändlig *girth*).

Låt nu d vara ett positivt heltal och låt G vara en graf med girth 5 där varje nod har grad minst d. Bevisa att G har minst $d^2 + 1$ noder.

Obs! Tentan beräknas vara färdigrättad den 19 januari. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00 och via email om du skriver till hegarty@math.chalmers.se