MATEMATIK Dag : 051017 Tid : 14.00 - 18.30.
Chalmers Tekniska Högskola Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty Vakt : Peter Hegarty 0733-428321 Johan Tykesson 0703-182096.

Tentamenskriving i Diskret Matematik (TMA 055)

26 poäng på denna tenta och 50 poäng totalt, inkl. poängen från inlämningsuppgifterna, ger godkännt.

1 (6p+8p+8p) (i) Lös kongruensen

$$37x \equiv 1 \pmod{98}.$$

(ii) Ange resten vid divsion med 98 som lämnas av

$$(3^{170} + 5^{129} + 1)^{83}.$$

(Tips : Resultatet från del **(i)** kan vara av nytta i slutskedet.)

(iii) Lös kongruensen

$$2x^2 - 3x + 10 \equiv 0 \pmod{19}.$$

2 (11p) Lös fullständigt recurrence relationen

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1,$$
$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2} + 3^n + 1, \quad \forall\, n \geq 2.$$

3 (5p+6p) Man hänvisas till grafen G i Fig. 1.
(i) Ange (med bevis) $\chi(G)$ och en explicit optimal färgning av G.
(ii) Tillämpa Dijkstras algoritm för att hitta en kortaste väg mellan v och w (Obs! Skriv ner vilken kant som väljs i vajre steg).

5 (8p+7p+7p) (i) Hur många pokergiv har minst tre kort i samma färg ?

(ii) Låt p vara ett primtal. Bevisa att

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

(Tips : Tänk 'inverspar'. Detta resultat kallas för *Wilsons sats* förresten).

(iii) För varje $n \geq 1$ låt D_n vara antalet följder av $n-1$ st heltal $a_1 \cdots a_{n-1}$ som uppfyller följande två villkor :

(a) $a_i \leq 1$ för alla i,

(b) alla partiella summorna är större än eller lika med noll, dvs för varje $k = 1, ..., n-1$ så gäller att

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0.$$

Till exempel, så är $D_3 = 5$ och vi har följande fem godkända följder av längd två:

$$0,0 \quad 0,1 \quad 1,0 \quad 1,1 \quad 1,-1$$

Bevisa att $D_n = C_n$, det n:te Catalantalet, för alla $n \geq 1$.

(TIPS : Betrakta den första positionen där den partiella summan är lika med noll).

Obs! Tentan beräknas vara färdigrättad den 24 oktober. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas också ut per telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.