Lösningar till ogjorda demonstrationsuppgifter

Avsnitt 2.2

10 (a) Detta är falsk. Det som snarare är sant är att inversen till produkten är lika med produkten av inverserna i OMVÄND ordning : se Theorem 6(b), s.121.
(b) Detta är sant, ty per definition av invers är

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

och dessa ekvationer säger lika väl att A är inversen till A^{-1} som att A^{-1} är inversen till A. Om vi tänker i termer av funktioner i stället, så är det bara att konstatera att inversen till en inversfunktion är funktionen själv.
(c) Detta är sant. Om $ad = bc$ så har antingen A själv en rad eller kolumn av nollor eller har en rad av nollor efter reduktion till trappstegsform. I alla dessa fall är matrisen inte inverterbar.
(d) Detta är sant. Vi har sett t.o.m. att man kan ta fram A^{-1} genom att utföra samma sekvens av radoperationer på I_n.
(e) Detta är falsk. Det blir sant om A^{-1} och I_n byter plats i slutet på meningen : se **(d)** ovan.

15. Tag $D = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Att detta är faktiskt inversen till ABC följer från associativiteten hos matrismultiplikation, ty

$$\begin{aligned}(ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) &= (AB)(CC^{-1})(B^{-1}A^{-1}) = (AB)I_n(B^{-1}A^{-1}) \\ &= (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n, \quad \text{v.s.v.}\end{aligned}$$

18. Det vikigaste att notera här är att man kan inte härleda från den givna ekvationen att $A = B$, detta pga att matrismultiplikation är inte kommutativ. Däremot om vi tar ekvationen

$$A = PBP^{-1}$$

och multiplicera i båda leden till vänster med P^{-1} och till höger med P så får vi att

$$P^{-1}AP = P^{-1}(PBP^{-1})P,$$

och eftersom matrismultiplikation ÄR associativ så kan HL nu förenklas till

$$(P^{-1}P)B(P^{-1}P) = I_nBI_n = B,$$

sådan att

$$B = P^{-1}AP.$$

Anmärkning : Två $n \times n$ matriser A och B sägs vara *similära (eng. similar)* om det finns en inverterbar $n \times n$ matris P sådan att $A = PBP^{-1}$. Detta begrepp återkommer i Kapitel 5.

Avsnitt 2.3

12 (a) Sant. Att det finns en sådan matris är ett sätt att säga att A är inverterbar (Theorem 8(k), s.129). Då är t.o.m. $C = D$ (Theorem 8(l), s.129).
(b) Sant. Båda påståendena är ekvivalenta med att A är inverterbar (Theorem 8(e,h), s.129).
(c) Sant. Det första påståendet innebär att A är inverterbar (Theorem 8(g), s.129). Det andra följer då från Theorem 8(f).
(d) Falsk. Det hade varit sant om ordet 'into' byttes ut mot 'onto' (Theorem 8(c,i)). Som det står här så kan man inte dra någon som helst slutsats om matrisen A från att $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ in i $\mathbb{R}^n$, utöver att A är en $n \times n$ matris (se Theorem 10, s.83).
(e) Sant. Att $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är inconsistent för något $\boldsymbol{b}$ innebär att påståendet i Theorem 8(g) inte gäller. Därmed är A inte inverterbar, så påståendet i Theorem 8(f) gäller inte heller, v.s.v.

Avsnitt 3.2

28 (a) Sant. Varje radbyte multiplicerar determinanten med -1 så två st i följd multiplicerar determinanten med $(-1)^2 = +1$.
(b) Falsk, t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Notera att påståendent är sant då matrisen är triangulär.
(c) Falsk. Motsatsen gäller men inte påståendet själv. Det enda man kan säga med säkerhet i fall $\det(A) = 0$ är att raderna (resp. kolumnerna) är linjärt beroende.
(d) Falsk, snarare är $\det(A^T) = \det(A)$.

40 (a) $\det(AB) = (\det A)(\det B) = (-1) \cdot 2 = -2$.
(b) $\det(B^5) = (\det B)^5 = 2^5 = 32$.
(c) Ty A är 4×4 gäller att $\det(2A) = 2^4(\det A) = -16$.
(d) $\det(A^T A) = (\det A^T)(\det A) = (\det A)^2$, ty $\det A^T = \det A$. Svar : $+1$.
(e) $\det(B^{-1}AB) = \det A = -1$ (similära matriser har samma determinant).

Avsnitt 3.3

24. Volymen av parallelopipeden är lika med absolutbeloppet av determinanten hos matrisen vars tre kolumner ges av figurens hörn. M.a.o. tar vi absolutbeloppet av följande determinant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Determinanten beräknas på sedvanligt sätt (Gausselimination eller en lämplig kofaktor expansion) och fås till -15. Svar : 15.

28. Låt S' beteckna bilden av S under avbildningen. Då gäller att

$$\text{Area av } S' = |\det A| \times (\text{Area av } S). \qquad (1)$$

Man beräknar direkt att $\det A = 5$. Dessutom ges arean av S av en determinant, nämligen

$$\text{Area av } S = |\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 4. \qquad (2)$$

Från (1) och (2) härleder vi att $\text{Area}(S') = 20$.

Avsnitt 4.3

8. Man vet omedelbart att dessa vektorer inte kan vara linjärt oberoende och därmed utgör inte en bas till $\mathbb{R}^3$ ty de är 4 st till antal och $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. För att avgöra exakt vilka som är linjärt oberoende så bektraktar vi kolonnrummet till matrisen som har dessa vektorer som sina kolumner, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vanlig Gausselimination tar A till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vi har pivoter i de tre första kolumnerna och därmed är motsvarande kolumner i A linjärt oberoende och utgör en bas till $\mathbb{R}^3$. M.a.o. en bas till $\mathbb{R}^3$ ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

16. Det är som i förra uppgiften. Vi ställer upp de fem vektorerna som kolumnerna i en matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

sådan att vi söker en bas till $\mathrm{Col}(A)$. Gausselimination producerar trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom pivoten finns i kolumner 1,2 och 3 så utgör $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ en bas till vektorrummet i fråga.

22 (a) Falsk. En bas är en *maximal* linjärt oberoende mängd.
(b) Sant. En bas är en *minimal* uppspännande mängd.
(c) Sant, se (a).
(d) Falsk. Identifiering av de fria variablerna följd av baksubstitution producerar alltid en bas till nollrummet.
(e) Sant. Jag förklarade detta på föreläsningen den 20/2. Se också paragrafen efter Exempel 8 i avsnitt 4.3.

26. Som alla naturligtvis kommer ihåg från inledande matematiken :) så är $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$. Så den tredje funktionen på listan är bara hälften av den andra. Men $\sin t$ och $\sin 2t$ är uppenbarligen linjärt oberoende, så de två utgör en bas till vektorrummet i fråga. Alternativt utgör $\sin t$ och $\sin t \cos t$ en bas.

30. Se lösningarna till de jämna uppgifterna i ett separat dokument på hemsidan, där en lösning till denna uppgift presenteras.

Avsnitt 4.6

4. *Fall 1 : Row(A)*

Dimensionen är antalet rader skilda från noll i trappstegsformen B, och just dessa rader utgör en bas till radrummet. Alltså är $\dim(\mathrm{Row}(A)) = 3$ och en bas ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fall 2 : Col(A)

Rad- och kolumnrummen har alltid samma dimension, lika med matrisens rang. En bas till kolumnrummet utgörs av de kolumner i A svarande mot de kolumner i B som innehåller pivoten, dvs kolumner 1,2 och 4. Alltså är $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 3$ och en bas ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fall 3 : Nul(A)

Dimensionen är antalet kolumner i B utan pivoter, dvs antalet fria variabler i systemet $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Så i det här fallet är $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 3$. För att ta fram en explicit bas måste vi arbeta igenom baksubstitutionen. Variablerna x_3, x_5 och x_6 är fria och de 3 raderna i B ger följande ekvationer för de återstående variablerna :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 - 9x_6 &= 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0, \\ x_4 - x_5 - 2x_6 &= 0. \end{aligned}$$

Vi går igenom systemet bakänges på sedvanligt sätt och räknar ut att den allmäna lösningen till systemet ges av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - 9x_5 - 2x_6 \\ x_3 - 7x_5 - 3x_6 \\ x_3 \\ x_5 + 2x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$= x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så att de tre vektorerna ovan utgör en bas till nollrummet.

8. Det finns 6 kolumner totalt i matrisen så det måste finnas $6-4=2$ st utan pivoter. Därmed är $\dim(\mathrm{Nul}(A))=2$. Kolumnrummet är 4-dimenionellt, men den är snarare ett underrum i $\mathbb{R}^5$, ty A har 5 rader.

16. Nollrummet kan vara 0-dimensionellt, dvs bestå bara av nollvektorn. Detta för att matrisen har färre kolumner än rader så det kan finnas en pivot i varje kolumn i trappstegsformen.
I allmänhet, om A är en $m\times n$ matris så måste $\dim(\mathrm{Nul}(A))\geq n-m$, ty det måste finnas minst $n-m$ kolumner utan pivoter i trappstegsformen, för det finns högst en pivot per rad.

Avsnitt 5.4

10 (a) That T is linear is the usual trivial observation that polynomials (or any other functions) are added and multiplied by scalars point-by-point. That is, for any polynomials $p(x), q(x)$, any scalar c and any input value x, we have (by definition)

$$(p+q)(x)=p(x)+q(x), \quad (cp)(x)=c\cdot p(x).$$

(b) T is a mapping from one 4-dimensional space to another. By definition, its matrix w.r.t. the given bases is the 4×4 matrix M_T whose columns are the coordinate vectors, w.r.t. the range-basis, of the images of the vectors in the domain-basis. Since we are working in this exercsie with standard bases in both the domain and the range, the columns of M_T are just the vectors in $\mathbb{R}^4$ given by, respectively, $T(1), T(t), T(t^2)$ and $T(t^3)$. By the definition of T we have

$$T(1)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad T(t)=\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{bmatrix}, \quad T(t^2)=\begin{bmatrix}9\\1\\1\\9\end{bmatrix}, \quad T(t^3)=\begin{bmatrix}-27\\-1\\1\\27\end{bmatrix}.$$

Thus the matrix we're looking for is

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 9 & -27\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 9 & 27\end{bmatrix}.$$

12. A itself is the matrix for the transformation in the standard basis $\mathcal{E}=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. This I denoted as $M_{\mathcal{E}}$ in the lecture notes. We seek the matrix $M_{\mathcal{B}}$. The general formula for base-change for linear transformations (see lecture notes) yields the relationship

$$M_{\mathcal{B}}=PM_{\mathcal{E}}P^{-1}, \quad \text{where } P=\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P}.$$

To apply this, we just need to identify P. In fact, it is simpler to first identify

$$P^{-1}=\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P},$$

since this is just the matrix whose columns are the vectors in $\mathcal{B}$. Thus

$$M_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\ldots=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

16. Such a basis must consist of eigenvectors of A. We first find its eigenvalues by solving the characteristic equation

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda & -6\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=\lambda^2-5\lambda=\lambda(\lambda-5).$$

Thus there are two eigenvalues, $\lambda_1=0$ and $\lambda_2=5$. One may check that the corresponding eigenspaces are spanned respectively by $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$. Thus the basis $\mathcal{B}$ should consist of these two vectors (or any multiples of them).

Avsnitt 5.1

26. Låt λ vara ett egenvärde till A. Då gäller att det finns en vektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ sådan att $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Multiplicera i båda leden till vänster med A så får vi att $A^2\boldsymbol{v} = \lambda(A\boldsymbol{v}) = \lambda(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v}$. Men $A^2 = 0$ så detta innebär att $\lambda^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Men $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ så vi måste ha $\lambda^2 = 0$ och därmed $\lambda = 0$, v.s.v.

Avsnitt 5.3

14. För $\lambda = 5$ har vi att

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så egenrummet är två dimensionellt, bestående av alla vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så vi väljer ut en bas av egenvektorer

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

På samma sätt för $\lambda = 4$ har vi att

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter baksubstitution ser man att egenrummet spänns upp av

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi följande diagonalsering av A :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

24. Nej, ty summan av dimensionerna av egenrummen är inte 3.

31. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Enda egenvärdet är 1 och motsvarande egenrum spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, och är bara 1-dimensionellt alltså. Matrisen är dock inverterbar (determinanten är 1). Kom ihåg att detta exempel gavs också på en föreläsning.

32. Den i uppgift 5.4.16 till exempel.

Avsnitt 6.3

10. One may check that $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$. Thus $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ where

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \mathrm{proj}_W \boldsymbol{y} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{y} + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{y} + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_3}\boldsymbol{y} \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}\right)\boldsymbol{u}_1 + \left(\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2}\right)\boldsymbol{u}_2 + \left(\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_3}{\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3}\right)\boldsymbol{u}_3 \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{14}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{5}{3}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\2\\3\\6\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finally,

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5\\2\\3\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\2\\2\\0\end{bmatrix}.$$

20. We can take

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_4 - \mathrm{proj}_W \boldsymbol{u}_4.$$

Note that $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$. Thus

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W \boldsymbol{u}_4 = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_4 + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{u}_4 &= \left(\frac{\boldsymbol{u}_4\cdot\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}\right)\boldsymbol{u}_1 + \left(\frac{\boldsymbol{u}_4\cdot\boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2}\right)\boldsymbol{u}_2 \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} - \frac{1}{30}\begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1/5\\-2/5\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Thus

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1/5\\-2/5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4/5\\2/5\end{bmatrix}.$$

Note that any scalar multiple of $\boldsymbol{v}$ works equally well, so if you want to pick a vector with integer entries, the natural choice is $\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$.

Avsnitt 6.4

10. Standard Gram-Schmidt. Let $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ denote the columns of the matrix from left to right. We wish to replace this basis for $\mathrm{Col}(A)$ by an orthogonal basis $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$. Proceed as usual. First,

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Next,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\right)\boldsymbol{v}_1 \\ &= \begin{bmatrix}6\\-8\\-2\\-4\end{bmatrix} - \left(-\frac{36}{12}\right)\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\1\\-1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Thirdly,

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\right) \boldsymbol{v}_1 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}\right) \boldsymbol{v}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{6}{12} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{30}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Avsnitt 6.5

14. One computes directly that

$$A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

whence that

$$\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

One then checks that the scalar product of these latter vectors with the first column of A is ± 22 respectively. Thus neither vector is orthogonal to $\text{Col}(A)$, and thus neither $\boldsymbol{u}$ nor $\boldsymbol{v}$ can be a least-squares solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Avsnitt 6.6

4. The least-squares line $y = \beta_0 + \beta_1 x$ is the least-squares solution to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

If we denote this system as $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ then the least-squares solution is given as usual by

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{... räkna själva ...} = \begin{bmatrix} 43/10 \\ -7/10 \end{bmatrix}.$$

Thus the best-fit line is $y = -\frac{7}{10}x + \frac{43}{10}$.

Avsnitt 7.1

19. *Step 1 : Find eigenvectors*

$\lambda_{1,2} = 7$: We have

$$A - 7I_3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Thus after the usual back-substitution, we get a basis for the eigenspace

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_3 = -2$: We have

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

After the usual back-substitution, we get a basis for the eigenspace

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Note : We could also have taken $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$, since the λ_3-eigenspace must be orthogonal to the $\lambda_{1,2}$-eigenspace, since the matrix is symmetric.

Step 2 : Orthogonalise the $\lambda_{1,2}$-eigenspace.

Take $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1$ and

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\right) \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Step 3 : Normalise the eigenvectors.

$$\boldsymbol{u}_1 := \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_3 := \frac{\boldsymbol{x}_3}{||\boldsymbol{x}_3||} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Step 4 : Perform the orthogonal diagonalisation.

We have

$$A = PDP^T,$$

where

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Thus, in this example,

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} & -1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$