

Dugga 2 Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den ORANGEA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den VISA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Det är t.o.m. så att för en kvadratisk matris A gäller att $\det A = \det A^T$ och, om A är inverterbar, att $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

(b) Detta är SANT. För i så fall gäller att

$$A^2B = (AA)B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = B(AA) = BA^2, \quad \text{v.s.v.}$$

Notera att i denna härledning har vi använt hypotesen att $AB = BA$ på två ställen och associativiteten hos matrismultiplikation på tre ställen.

(c) Detta är FALSKT. Snarare gäller att

$$\det(A^{-1}B) = (\det A^{-1})(\det B) = \frac{1}{\det A} \times \det B = \frac{\det B}{\det A}.$$

(d) Detta är FALSKT. T.ex. om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ så har A endast positiva element men $\det A = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$.

2 (a) Om vi subtraherar rad 1 från var och en av de andra raderna så ändras inte determinanten och matrisen förvandlas till

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Om vi nu byter plats på rad 2 och rad 4 så ändras determinantens tecken, medan att matrisen blir övre triangulär :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinanten av en triangulär matris är bara produkten av talen längs diagonalen, i detta fall $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Så den ursprungliga determinanten var -4 .

(b) Man ska utföra radoperationer på den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Man kan kolla att sekvensen av radoperationer

$$R_1 \mapsto R_1 - 3R_2, \quad R_1 \mapsto R_1 + 16R_3, \quad R_2 \mapsto R_2 - 7R_3,$$

tar vänstra delen (dvs A) till I_3 , och därmed högra delen till A^{-1} , och att den senare ges av

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 8 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Man kan kolla att följderna av radoperationer

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 3R_2,$$

tar A till trappstegsformen

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Därmed kan vi också avläsa att

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösningar till den vita versionen

1. Falskt, sant, falskt, sant.

2 (a) -6 .

(b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 10 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$