Lösningar till ogjorda demonstrationsuppgifter

Avsnitt 1.4

16. Vi betraktar den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ -3 & 2 & 6 & b_2 \\ 5 & -1 & -8 & b_3 \end{array}\right].$$

Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 + 3R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - 5R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_2,$$

så förvandlas systemet till trappstegsformen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & b_1 \\ 0 & -7 & -6 & b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & (b_3 - 5b_1) + 2(b_2 + 3b_1) = b_1 + 2b_2 + b_3 \end{array}\right].$$

Därmed har systemet (oändligt många) lösningar om och endast om

$$b_1 + 2b_2 + b_3 = 0. \tag{1}$$

Det är m.a.o. precis de vektorer $\boldsymbol{b} = [b_1\ b_2\ b_3]^T$ som uppfyller (1) för vilka $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en lösning. Dess vektorer utgör ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$, nämligen planet $x + 2y + z = 0$.

26. De allmänna reglerna för multiplikation av matriser med vektorer innebär att

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{u} + x_2\boldsymbol{v}..$$

Ska detta vara lika med $\boldsymbol{w}$ och vi vet redan att $3\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ så ska man naturligtvis välja $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

32. Nej, man behöver minst lika många vektorer som rummets dimension. Detta är lättast att uppfatta rent geometriskt. Om man tänker algebraiskt i stället : säg att man har n vektorer i $\mathbb{R}^m$ där $n < m$. Om dessa skulle spänna upp $\mathbb{R}^m$ så skulle det innebära att ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hade en lösning för VARJE $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, där A är den $m \times n$ matris vars kolumner är de givna vektorerna. Men eftersom denna matris har fler rader än kolumner så MÅSTE trappstegsformen ha minst en rad enbart av nollor. Och då kommer systemet oundvikligen att vara inkonsekvent för vissa $\boldsymbol{b}$.

Avsnitt 1.8

32. Tag t.ex. $\boldsymbol{u} = (0, 1)$ och $\boldsymbol{v} = (0, -1)$ sådan att $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (0, 0)$. Per definition av T kan man räkna ut att

$$T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}) = (0, 3), \quad T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (0, 0).$$

Eftersom $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \neq T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$ så är T inte linjär.

Avsnitt 1.9

10. Låt A_T vara matrisen för T, som vanligt. Det är den 2×2 matris vars kolumner är bilderna av $(1,0)$ och $(0,1)$ respektivt under verkan av T.
Först betrakta $(1,0)$. Spegling i x_2-axeln skickar den till $(-1,0)$. Därefter skickas $(-1,0)$ via en 90-graders moturs rotation till $(0,-1)$. Så första kolumnen i A_T är $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Näst betrakta $(0,1)$. Spegling i x_2-axeln gör ingenting för denna punkt ligger på x_2-axeln. Den efterföljande rotationen skickar den dock till $(-1,0)$. Så den andra kolumnen i A_T är $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Sammanlagt har vi då att

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anmärkning : T är helt enkelt en spegling i linjen $y = -x$.

Avsnitt 2.2

10 (a) Detta är falsk. Det som snarare är sant är att inversen till produkten är lika med produkten av inverserna i OMVÄND ordning : se Theorem 6(b), s.121.
(b) Detta är sant, ty per definition av invers är

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

och dessa ekvationer säger lika väl att A är inversen till A^{-1} som att A^{-1} är inversen till A. Om vi tänker i termer av funktioner i stället, så är det bara att konstatera att inversen till en inversfunktion är funktionen själv.
(c) Detta är sant. Om $ad = bc$ så har antingen A själv en rad eller kolumn av nollor eller har en rad av nollor efter reduktion till trappstegsform. I alla dessa fall är matrisen inte inverterbar.
(d) Detta är sant. Vi har sett t.o.m. att man kan ta fram A^{-1} genom att utföra samma sekvens av radoperationer på I_n.
(e) Detta är falsk. Det blir sant om A^{-1} och I_n byter plats i slutet på meningen : se **(d)** ovan.

15. Tag $D = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Att detta är faktiskt inversen till ABC följer från associativiteten hos matrismultiplikation, ty

$$(ABC)(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) = (AB)(CC^{-1})(B^{-1}A^{-1}) = (AB)I_n(B^{-1}A^{-1})$$
$$= (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n, \quad \text{v.s.v.}$$

18. Det vikigaste att notera här är att man kan inte härleda från den givna ekvationen att $A = B$, detta pga att matrismultiplikation är inte kommutativ. Däremot om vi tar ekvationen

$$A = PBP^{-1}$$

och multiplicera i båda leden till vänster med P^{-1} och till höger med P så får vi att

$$P^{-1}AP = P^{-1}(PBP^{-1})P,$$

och eftersom matrismultiplikation ÄR associativ så kan HL nu förenklas till

$$(P^{-1}P)B(P^{-1}P) = I_nBI_n = B,$$

sådan att

$$B = P^{-1}AP.$$

ANMÄRKNING : Två $n \times n$ matriser A och B sägs vara *similära (eng. similar)* om det finns en inverterbar $n \times n$ matris P sådan att $A = PBP^{-1}$. Detta begrepp återkommer i Kapitel 5.

Avsnitt 2.3

12 (a) Sant. Att det finns en sådan matris är ett sätt att säga att A är inverterbar (Theorem 8(k), s.129). Då är t.o.m. $C = D$ (Theorem 8(l), s.129).
(b) Sant. Båda påståendena är ekvivalenta med att A är inverterbar (Theorem 8(e,h), s.129).
(c) Sant. Det första påståendet innebär att A är inverterbar (Theorem 8(g), s.129). Det andra följer då från Theorem 8(f).
(d) Falsk. Det hade varit sant om ordet 'into' byttes ut mot 'onto' (Theorem 8(c,i)). Som det står här så kan man inte dra någon som helst slutsats om matrisen A från att $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ avbildar $\mathbb{R}^n$ in i $\mathbb{R}^n$, utöver att A är en $n \times n$ matris (se Theorem 10, s.83).
(e) Sant. Att $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ är inconsistent för något $\boldsymbol{b}$ innebär att påståendet i Theorem 8(g) inte gäller. Därmed är A inte inverterbar, så påståendet i Theorem 8(f) gäller inte heller, v.s.v.

26. Att kolumnerna i A är linjärt oberoende innebär att A är inverterbar (Theorem 2.3.8(e)). Detta medför i sin tur att A^2 är inverterbar (och $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ enligt Theorem 2.2.6(b)). Därmed spänns $\mathbb{R}^n$ upp av kolumnerna i A^2, enligt Theorem 2.3.8((h).

Avsnitt 3.2

28 (a) Sant. Varje radbyte multiplicerar determinanten med -1 så två st i följd multiplicerar determinanten med $(-1)^2 = +1$.
(b) Falsk, t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Notera att påståendent är sant då matrisen är triangulär.
(c) Falsk. Motsatsen gäller men inte påståendet själv. Det enda man kan säga med säkerhet i fall $\det(A) = 0$ är att raderna (resp. kolumnerna) är linjärt beroende.
(d) Falsk, snarare är $\det(A^T) = \det(A)$.

40 (a) $\det(AB) = (\det A)(\det B) = (-1) \cdot 2 = -2$.
(b) $\det(B^5) = (\det B)^5 = 2^5 = 32$.
(c) Ty A är 4×4 gäller att $\det(2A) = 2^4(\det A) = -16$.
(d) $\det(A^T A) = (\det A^T)(\det A) = (\det A)^2$, ty $\det A^T = \det A$. Svar : $+1$.
(e) $\det(B^{-1}AB) = \det A = -1$ (similära matriser har samma determinant).

Avsnitt 3.3

24. Volymen av parallelopipeden är lika med absolutbeloppet av determinanten hos matrisen vars tre kolumner ges av figurens hörn. M.a.o. tar vi absolutbeloppet av följande determinant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Determinanten beräknas på sedvanligt sätt (Gausselimination eller en lämplig kofaktor expansion) och fås till -15. Svar : 15.

28. Låt S' beteckna bilden av S under avbildningen. Då gäller att

$$\text{Area av } S' = |\det A| \times (\text{Area av } S). \tag{2}$$

Man beräknar direkt att $\det A = 5$. Dessutom ges arean av S av en determinant, nämligen

$$\text{Area av } S = |\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} = 4. \tag{3}$$

Från (1) och (2) härleder vi att $\text{Area}(S') = 20$.

Avsnitt 4.2

6. $\text{Nul}(A)$ består av alla vektorer $\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T \in \mathbb{R}^5$ sådan att $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi måste skriva mängden av dessa vektorer i parametrisk vektorform på sedvanligt sätt. Matrisen A är redan i trappstegsform och variablerna x_3, x_4 och x_5 är fria. Bakåtsubstitution ger till att börja med

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3 - x_4,$$

och därefter

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = -5(2x_3 - x_4) + 4x_3 + 3x_4 - x_5 &= -6x_3 + 8x_4 - x_5. \end{aligned}$$

Därmed gäller att

$$\begin{aligned} \text{Nul}(A) &= \left\{ \begin{bmatrix} -6x_3 + 8x_4 - x_5 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} : x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}, \\ &= \left\{ x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Dessa tre vektorer spänner upp nollrummet alltså.

16. Vi konstaterar som i föregående uppgift att

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} b - c \\ 2b + c + d \\ 5c - 4d \\ d \end{bmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Eftersom kolonnrummet till en matris är, per definition, vektorrummet som spänns upp av matrisens kolumner, så borde vi välja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

26 (a) Sant (Theorem 2, Section 4.2).
(b) Sant (Theorem 3, Section 4.2).
(c) Falskt. Snarare är det mängden av alla $\boldsymbol{b}$ för vilka ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har en lösning.
(d) Sant. Per definition består kärnan till en linjär avbildning av alla vektorer $\boldsymbol{x}$ sådan att $T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Så om $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ består kärnan av alla $\boldsymbol{x}$ sådan att $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, dvs matrisens nollrum.
(e) Sant. Det är just kolonnrummet av avbildningens matris.
(f) Sant, men jag hoppar över en förklaring (skulle vara en för lång tangent).

Avsnitt 4.3

8. Man vet omedelbart att dessa vektorer inte kan vara linjärt oberoende och därmed utgör inte en bas till $\mathbb{R}^3$ ty de är 4 st till antal och $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. För att avgöra exakt vilka som är linjärt oberoende så bektraktar vi kolonnrummet till matrisen som har dessa vektorer som sina kolumner, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vanlig Gausselimination tar A till trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vi har pivoter i de tre första kolumnerna och därmed är motsvarande kolumner i A linjärt oberoende och utgör en bas till $\mathbb{R}^3$. M.a.o. en bas till $\mathbb{R}^3$ ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

16. Det är som i förra uppgiften. Vi ställer upp de fem vektorerna som kolumnerna i en matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

sådan att vi söker en bas till $\mathrm{Col}(A)$. Gausselimination producerar trappstegsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eftersom pivoten finns i kolumner 1,2 och 3 så utgör $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\boldsymbol{v}_3$ en bas till vektorrummet i fråga.

22 (a) Falsk. En bas är en *maximal* linjärt oberoende mängd.
(b) Sant. En bas är en *minimal* uppspännande mängd.
(c) Sant, se (a).
(d) Falsk. Identifiering av de fria variablerna följd av baksubstitution producerar alltid en bas till nollrummet.
(e) Sant. Jag förklarade detta på föreläsningen den 20/2. Se också paragrafen efter Exempel 8 i avsnitt 4.3.

24. Följer omedelbart från Sats 12 i avsnitt 4.5.

26. Som alla naturligtvis kommer ihåg från inledande matematiken :) så är $\sin 2t = 2\sin t\cos t$. Så den tredje funktionen på listan är bara hälften av den andra. Men $\sin t$ och $\sin 2t$ är uppenbarligen linjärt oberoende, så de två utgör en bas till vektorrummet i fråga. Alternativt utgör $\sin t$ och $\sin t\cos t$ en bas.

30. Se lösningarna till de jämna uppgifterna i ett separat dokument på hemsidan, där en lösning till denna uppgift presenteras.

Avsnitt 4.5

30 (a) Falskt. Man kan hitta hur många linjärt beroende vektorer man vill i vilket vektorrum som helst (t.ex. genom att ta med olika multipler av samma vektor). Om det hade stått i stället

'If there exists a linearly independent set $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_p\}$ in V then $\dim(V) \geq p$'

då hade det varit sant.
(b) Sant. En bas till ett p-dimensionellt rum skulle spänna upp rummet och innehålla p vektorer.
(c) Falskt, se **(a)**. Det finns NÅGRA mängder av $p-1$ oberoende vektorer, t.ex. lämpliga delmängder till baser.

Avsnitt 4.6

4. *Fall 1 : Row(A)*

Dimensionen är antalet rader skilda från noll i trappstegsformen B, och just dessa rader utgör en bas till radrummet. Alltså är $\dim(\text{Row}(A)) = 3$ och en bas ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fall 2 : Col(A)

Rad- och kolumnrummen har alltid samma dimension, lika med matrisens rang. En bas till kolumnrummet utgörs av de kolumner i A svarande mot de kolumner i B som innehåller pivoten, dvs kolumner 1,2 och 4. Alltså är $\dim(\text{Col}(A)) = 3$ och en bas ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Fall 3 : Nul(A)

Dimensionen är antalet kolumner i B utan pivoter, dvs antalet fria variabler i systemet $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Så i det här fallet är $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 3$. För att ta fram en explicit bas måste vi arbeta igenom baksubstitutionen. Variablerna x_3, x_5 och x_6 är fria och de 3 raderna i B ger följande ekvationer för de återstående variablerna :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 7x_4 + 9x_5 - 9x_6 &= 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0, \\ x_4 - x_5 - 2x_6 &= 0. \end{aligned}$$

Vi går igenom systemet bakänges på sedvanligt sätt och räknar ut att den allmäna lösningen till systemet ges av

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - 9x_5 - 2x_6 \\ x_3 - 7x_5 - 3x_6 \\ x_3 \\ x_5 + 2x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$= x_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

så att de tre vektorerna ovan utgör en bas till nollrummet.

8. Det finns 6 kolumner totalt i matrisen så det måste finnas $6 - 4 = 2$ st utan pivoter. Därmed är $\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 2$. Kolumnrummet är 4-dimenionellt, men den är snarare ett underrum i $\mathbb{R}^5$, ty A har 5 rader.

16. Nollrummet kan vara 0-dimensionellt, dvs bestå bara av nollvektorn. Detta för att matrisen har färre kolumner än rader så det kan finnas en pivot i varje kolumn i trappstegsformen.
I allmänhet, om A är en $m \times n$ matris så måste $\dim(\mathrm{Nul}(A)) \geq n - m$, ty det måste finnas minst $n - m$ kolumner utan pivoter i trappstegsformen, för det finns högst en pivot per rad.

Avsnitt 5.1

6. Vi kan kolla att

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då är $[1\ -2\ 1]^T$ visst en egenvektor till matrisen, och motsvarande egenvärde är -2.
OBS! Man hade kunnat lösa denna uppgift genom att ställa upp matrisens karakteristiska ekvation, hitta alla egenvärdena och m.s. egenvektorerna och se om $[1\ -2\ 1]^T$ finns bland dessa. Men denna är en onödigt lång metod.

22 (a) Falskt. Hade varit sant om man hade lagt till att $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.
(b) Falskt, för man kan ha ett enda egenrum som har dimesnion högre än 1 (t.ex. $\lambda = 2$

egenrummet i Exempel 4 i detta avsnitt). Det motsatta påståendet är dock sant - sats 2.
(c) Sant. Definitionerna av termerna *stokastisk matris* och *jämviktsvektor* ges i avsnitt 4.9 och kommer också att nämnas på föreläsningen den 25/2. En jämviktsvektor till en stokastisk matris är, per definition, en egenvektor svarande mot egenvärdet 1.
(d) Falskt. Det är sant om matrisen är triangulär (Sats 1).
(e) Sant. Egenrummet för ett egenvärde λ är just nollrummet till matrisen $A - \lambda I_n$, om A är en $n \times n$ matris.

26. Låt λ vara ett egenvärde till A. Då gäller att det finns en vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ sådan att $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Multiplicera i båda leden till vänster med A så får vi att $A^2\boldsymbol{v} = \lambda(A\boldsymbol{v}) = \lambda(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v}$. Men $A^2 = 0$ så detta innebär att $\lambda^2\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Men $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ så vi måste ha $\lambda^2 = 0$ och därmed $\lambda = 0$, v.s.v.

27. Det enklaste sättet att bevisa detta är att använda den karakteristiska ekvationen (som först förekommer i avsnitt 5.2). Den säger att talet λ är ett egenvärde till matrisen A om och endast om

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Kom ihåg (Sats 5, avsnitt 3.2) att en kvadratisk matris och dess transponat har alltid samma determinant. Därför gäller att

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n)^T = 0.$$

Men $(A - \lambda I_n)^T = A^T - (\lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$, ty enhetsmatrisen är symmetrisk. Så vi drar slutsatsen att

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \det(A^T - \lambda I_n) = 0.$$

M.a.o. är λ ett egenvärde till A om och endast om det är ett egenvärde till A^T.

Avsnitt 5.3

14. För $\lambda = 5$ har vi att

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så egenrummet är två dimensionellt, bestående av alla vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så vi väljer ut en bas av egenvektorer

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

På samma sätt för $\lambda = 4$ har vi att

$$A - 4I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Efter baksubstitution ser man att egenrummet spänns upp av

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi följande diagonalsering av A :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

24. Nej, ty summan av dimensionerna av egenrummen är inte 3.

31. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Enda egenvärdet är 1 och motsvarande egenrum spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, och är bara 1-dimensionellt alltså. Matrisen är dock inverterbar (determinanten är 1). Kom ihåg att detta exempel gavs också på en föreläsning.

32. Den i uppgift 5.4.16 till exempel.

Avsnitt 5.4

10 (a) That T is linear is the usual trivial observation that polynomials (or any other functions) are added and multiplied by scalars point-by-point. That is, for any polynomials $p(x), q(x)$, any scalar c and any input value x, we have (by definition)

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (cp)(x) = c \cdot p(x).$$

(b) T is a mapping from one 4-dimensional space to another. By definition, its matrix w.r.t. the given bases is the 4×4 matrix M_T whose columns are the coordinate vectors, w.r.t. the range-basis, of the images of the vectors in the domain-basis. Since we are working in this exercsie with standard bases in both the domain and the range, the columns of M_T are just the vectors in $\mathbb{R}^4$ given by, respectively, $T(1), T(t), T(t^2)$ and $T(t^3)$. By the definition of T we have

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad T(t^3) = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 1 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Thus the matrix we're looking for is

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

12. A itself is the matrix for the transformation in the standard basis $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. This I denoted as $M_{\mathcal{E}}$ in the lecture notes. We seek the matrix $M_{\mathcal{B}}$. The general formula for base-change for linear transformations (see lecture notes) yields the relationship

$$M_{\mathcal{B}} = P M_{\mathcal{E}} P^{-1}, \quad \text{where } P = \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}{P}.$$

To apply this, we just need to identify P. In fact, it is simpler to first identify

$$P^{-1} = \underset{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{P},$$

since this is just the matrix whose columns are the vectors in $\mathcal{B}$. Thus

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Such a basis must consist of eigenvectors of A. We first find its eigenvalues by solving the characteristic equation

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5).$$

Thus there are two eigenvalues, $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = 5$. One may check that the corresponding eigenspaces are spanned respectively by $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Thus the basis $\mathcal{B}$ should consist of these two vectors (or any multiples of them).

22. Att A är diagonaliserbar innebär att det finns en diagonalmatris Λ och en inverterbar matris X s.a.

$$A = X\Lambda X^{-1}. \tag{4}$$

Att B är similär till A innebär att det finns en inverterbar matris Y s.a.

$$B = YAY^{-1}. \tag{5}$$

Från (4) och (5) härleder vi att

$$B = Y(X\lambda X^{-1})Y^{-1} = (YX)\Lambda(X^{-1}Y^{-1}) = (YX)\Lambda(YX)^{-1}.$$

Sätt $Z := YX$. Så $B = Z\Lambda Z^{-1}$ och detta är en diagonalisering av B.
Anmärkning : Notera att det är samma diagonalmatris som gäller när vi diagonaliserar A och B, som medför att dessa två matriser har samma egenvärden. Detta gäller alltid för similära matriser, även om de inte är diagonliserbara : se Sats 4, avsnitt 5.2.

Avsnitt 6.1

24. Remember that, for any vector $\boldsymbol{x}$ one has $||\boldsymbol{x}x||^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$. Thus

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}||^2 &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \\ = (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) &+ (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) \\ &= 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 2||\boldsymbol{u}||^2 + 2||\boldsymbol{v}||^2, \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$

Avsnitt 6.3

10. One may check that $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = 0$. Thus $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ where

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \mathrm{proj}_W \boldsymbol{y} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{y} + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_2}\boldsymbol{y} + \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}_3}\boldsymbol{y} \\ &= \left(\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}\right)\boldsymbol{u}_1 + \left(\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2}\right)\boldsymbol{u}_2 + \left(\frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_3}{\boldsymbol{u}_3\cdot\boldsymbol{u}_3}\right)\boldsymbol{u}_3 \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{14}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finally,

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

16. Let W denote the subspace spanned by $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$. Let $\hat{\boldsymbol{y}} := \text{proj}_W \boldsymbol{y}$. Then the distance from $\boldsymbol{y}$ to W is $||\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}||$.
Observe that $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$ so $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ is an orthogonal basis for W. Consequently,

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \left(\frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\right) \boldsymbol{v}_1 + \left(\frac{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}\right) \boldsymbol{v}_2$$
$$= \frac{30}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{26}{26}\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Hence,

$$\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

and so $||\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}}|| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$.

20. We can take

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_4 - \text{proj}_W \boldsymbol{u}_4.$$

Note that $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$. Thus

$$\text{proj}_W \boldsymbol{u}_4 = \text{proj}_{\boldsymbol{u}_1} \boldsymbol{u}_4 + \text{proj}_{\boldsymbol{u}_2} \boldsymbol{u}_4 = \left(\frac{\boldsymbol{u}_4 \cdot \boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1}\right) \boldsymbol{u}_1 + \left(\frac{\boldsymbol{u}_4 \cdot \boldsymbol{u}_2}{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2}\right) \boldsymbol{u}_2$$
$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}.$$

Thus

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}.$$

Note that any scalar multiple of $\boldsymbol{v}$ works equally well, so if you want to pick a vector with integer entries, the natural choice is $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Avsnitt 6.4

10. Standard Gram-Schmidt. Let $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ denote the columns of the matrix from left to right. We wish to replace this basis for $\text{Col}(A)$ by an orthogonal basis $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$. Proceed as usual. First,

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Next,

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\right) \boldsymbol{v}_1$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} - \left(-\frac{36}{12}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Thirdly,

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\right) \boldsymbol{v}_1 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2}\right) \boldsymbol{v}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{6}{12} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{30}{12} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Avsnitt 6.5

14. One computes directly that

$$A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

whence that

$$\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

One then checks that the scalar product of these latter vectors with the first column of A is ± 22 respectively. Thus neither vector is orthogonal to $\mathrm{Col}(A)$, and thus neither $\boldsymbol{u}$ nor $\boldsymbol{v}$ can be a least-squares solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Avsnitt 6.6

4. The least-squares line $y = \beta_0 + \beta_1 x$ is the least-squares solution to

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

If we denote this system as $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ then the least-squares solution is given as usual by

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \ldots \text{ räkna själva } \ldots = \begin{bmatrix} 43/10 \\ -7/10 \end{bmatrix}.$$

Thus the best-fit line is $y = -\frac{7}{10}x + \frac{43}{10}$.

Avsnitt 7.1

19. *Step 1 : Find eigenvectors*

$\lambda_{1,2} = 7$: We have

$$A - 7I_3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Thus after the usual back-substitution, we get a basis for the eigenspace

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_3 = -2$: We have

$$A + 2I_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

After the usual back-substitution, we get a basis for the eigenspace

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Note : We could also have taken $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$, since the λ_3-eigenspace must be orthogonal to the $\lambda_{1,2}$-eigenspace, since the matrix is symmetric.

Step 2 : Orthogonalise the $\lambda_{1,2}$-eigenspace.

Take $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1$ and

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1}\right) \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Step 3 : Normalise the eigenvectors.

$$\boldsymbol{u}_1 := \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_3 := \frac{\boldsymbol{x}_3}{||\boldsymbol{x}_3||} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Step 4 : Perform the orthogonal diagonalisation.

We have

$$A = PDP^T,$$

where

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Thus, in this example,

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} & -1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

26 (a) True. Theorem 7.1.3(d).

(b) True. For if $B = PDP^T$ then $B^T = (PDP^T)^T \overset{\text{Thm. 2.1.3(d)}}{=} (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = B$ (notera att en diagonalmatris är alltid symmetrisk).

(c) False, since the matrix need not be symmetric. For example take a 2×2 rotation matrix $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. This is orthogonal, but is symmetric if and only if $\sin\theta = 0$, i.e.: if and only if θ is a multiple of π.

(d) True. Theorem 7.1.3(b).

30. A matrix is orthogonally diagonalisable if and only if it is symmetric : see parts **(a)** and **(b)** of exercise 26 above. Thus it suffices to show that if A and B are both symmetric and $AB = BA$, then AB is also symmetric. This is indeed the case, since then

$$(AB)^T \overset{\text{Thm. 2.1.3(d)}}{=} B^T A^T \overset{\text{by symmetry}}{=} BA \overset{\text{by hypothesis}}{=} AB.$$

OBS! What the above shows is that a product of two symmetric matrices is still symmetric if and only if the matrices commute.