version 07 01 03

Oändliga frågor

Mats Andersson 2003

Väldigt mycket även ganska vardaglig matematik involverar begreppet oändlighet i en eller annan form. Ordet “oändlig” dyker också ofta upp i helt alldagliga samtal; t ex “Norrlands skogar är oändliga” eller “jag älskar dig oändligt mycket”. I det första fallet menar man väl bara att skogarna är mycket stora, kanske oöverblickbart stora, medan man i det andra fallet nog menar mer bokstavligt att kärleken är gränslös, eller kanske snarare förbehållslös. Även djupt inne i skogen förekommer ordet ofta.

Finns det oändligt många tal?

“Pappa, finns det verkligen oändligt många tal” utbrast tonårsdottern, när tomtefar just skulle lassa in första sleven med gröt. Han stannade till mitt i rörelsen och började sakta sänka sleven mot tallriken medan han tänkte febrilt. Han var oändligt trött på dessa oändligt många frågor som han inte visste vad han skulle svara på. När han var liten nisse hade det varit otänkbart att tomtefar skulle sitta svarslös vid bordet. Han drog sig eftertänksamt i skägget och hoppades att tomtemor, som så ofta annars, skulle komma till hans räddning, men hon stod fortfarande kvar vid spisen och lassade upp gröt till de andra, och det såg inte ut som hon hade hört. Även tomtenissen teg för ovanlighetens skull så det blev en ganska lång tystnad vid bordet, tills tomtemor sken upp.

“Det finns definitivt oändligt långa tal” fnissade hon,

“jag minns när du” hon vände sig nu till tomtefar,

“skulle hålla tal på mitt fyrtioårskalas efter att du och de andra tomtegubbarna hade slagit i glasen och varit lustiga...” Nu fnissade barnen också och tomtefar förde åter sleven till munnen för att det inte skulle synas att han blev generad.

“Men allvarligt talat; frågan om man kan räkna hur långt som helst, eller om det finns hur stora tal som helst, är inte alls så enkel som det kan verka” fortsatte nu tomtemor medan hon satte sig ned med sin egen gröttallrik. Hon behövde också vinna lite tid. Hon hade varit intresserad av matematik redan i skolan och skaffat sig en del litteratur och läst på kvällarna, men det var först sedan barnen blivit någorlunda stora som hon fått mer ordentligt med tid för studier. I vanliga fall höll hon tyst om sina förvärvade kunskaper men när nu frågan dök upp ville hon gärna ge ett korrekt och även pedagogiskt svar. Eller får man inte säga "korrekt svar", och kanske heter det "didaktiskt" istället för "pedagogiskt". Nä, tänkte hon, nu måste jag koncentrera mig på själva frågan istället.

" Å ena sidan är det inte ju alls svårt att skriva upp ett tal som är större än antalet molekyler i hela, ja åtminstone det observerbara, universum; t ex $10^{(10^{10})}$ räcker mer än väl," hon gestikulerade med händerna för att illustrera hur hon menade att man skulle ta potenserna,

"men det är ju fortfarande ett ändligt tal. I vår omvärld finns inte något som säkert är oändligt, det är ju i alla fall inte belagt att t ex universum är oändligt stort. Det finns inte heller självklart hur små saker som helst i vår omvärld; det finns ju begränsningar på molekylär nivå."

Tomtefar hade redan stängt öronen och koncentrerade sig helt på gröten, men barnen lyssnade påfallande uppmärksamt på sin mor.

"Till att börja med kan man fundera på vad det innebär att säga att det ena eller andra talet finns överhuvudtaget." Hon tog en klunk av tomtemusten innan hon fortsatte.

"Det är närmast en filosofisk fråga om talen finns oberoende av oss själva eller bara i våra tankar. De flesta av oss har väl kanske ändå uppfattningen att talet 3 existerar i någon rimlig mening, eller hur?" Hon sneglade åt tomtefar som höll blicken fäst ned i gröttallriken.

"Det är ett mycket större steg att påstå att alla tal som någon överhuvudtaget skulle kunna skriva upp någon gång redan finns innan någon ens tänkt på dem. Så det finns en filosofisk sida av detta, men som vi kanske inte ska gräva ned oss i. Till skillnad från filosofin försöker man i matematiken anlägga ett mer pragmatiskt synsätt." Usch vad detta lät tillgjort tänkte hon, men valde ändå att fortsätta på den inslagna vägen, när hon nu ändå hade kommit igång så bra.

"Det viktiga är då inte i vilken mening talen existerar utan vilka egenskaper de har och hur man kan hantera dem, alltså räkna med dem." Ingen sa något, så när hon hade hämtat andan fortsatte hon.

"Om någon ger oss, eller anger, en massa tal, så är det alltid möjligt att hitta ett som inte finns med, t ex genom att ta summan av alla de andra. Detta innebär att det finns ett obegränsat antal tal. Vi kan ju också uttrycka det som att det finns oändligt många tal. Men observera att vi inte löst den filosofiska frågan på detta sätt utan bara sagt något om vad vi menar med påståendena att talen finns och att det finns oändligt många av dem."

Och måltiden avlöpte med tomtemor och barnen livligt diskuterande dessa frågor. När det var dags för efterrätten började tomtemor berätta om hur stora tal kan erbjuda hisnande tankelekar.

"Tänk er ett bibliotek som innehåller alla olika tänkbara böcker på säg max 1000 sidor. Med en bok menar vi då någonting där varje sida är fylld med tecken, dvs de små och stora bokstäverna, mellanslag och skiljetecken. Det blir många böcker men ändå ett ändligt antal [1]."

Tomtefar som just lyssnade till med ett halvt öra tyckte det var en helfnoskig tankelek eftersom han ansåg att redan det lokala biblioteket innehöll fler böcker än han någonsin skulle orka läsa, men han fann för gott att hålla detta för sig själv.

" De allra flesta av dessa kommer bara att innehålla nonsens, men bland dem finns en och annan bok som går att läsa, alla romaner som redan skrivits kommer att finnas med, och även alla som överhuvudtaget går att skriva. Visst låter det som ett fantastiskt bibliotek?"

"Men någon hake måste väl ändå finnas, hur ska man få plats med alla dessa böcker t ex?" sa den kloka tonårsdottern, och tomtenissen nickade instämmande. Förmodligen skulle tomtefar också gjort det, om han inte var på väg att resa sig.

"Jo" mös tomtemor, för hon tyckte att detta var lite av tjusningen med tanken,

" en hake är ju att hitta en viss bok i detta bibliotek är minst lika svårt som att skriva den själv. En annan fundamental hake är, precis som du är inne på, att biblioteket inte kan existera i en begriplig mening eftersom antalet böcker antagligen skulle vara mycket större än antalet möjliga kombinationer av molekyler i hela universum." När hon avslutat meningen drack hon upp det sista i tomtemustglaset och började plocka av bordet, utan att försöka dölja hur nöjd hon var.

Kan man mäta alla sträckor?

Nästa kväll tog middagskonversationen inledningsvis en för tomtefar mycket mer angenäm vändning. Det började med att tomtemor frågade nissen vad han gjort i skolan, och han berättade att de hade hållit på att mäta med tumstock i träslöjden.

"Om man vill göra en ny tumstock så kan man ju utgå från en som redan finns, men hur gjorde man den första tumstocken" sa nissen och såg tankfull ut, och fortsatte

"är det någon tomte som bara har bestämt vad en tum ska vara?"

Tomtefar som arbetat i tomteverkstaden dagligen i nästan trettio år såg genast sin chans att ta initiativet.

"Visst, du har helt rätt, om man ska kunna mäta sträckor måste man först ha en grundenhet, och det är ju väldigt praktiskt om alla tomtar har samma, men i princip kan man ju ta vilken man vill," sa han och rev åt sig en tidning och en penna, la sin tumme i marginalen och ritade en sträcka lika lång som sin tumme.

---

[1] Om vi antar att det finns cirka 100 olika tecken och det får plats 3000 tecken på varje sida så finns det plats för cirka $1000 \cdot 3000 = 3 \cdot 10^6$ tecken i varje bok. Antalet olika böcker är, enligt multiplikationsprincipen, därför $100^{3\cdot 10^6} = 10^{6\cdot 10^6}$; detta är ett ofantligt tal som i vanliga positionssystemet skrivs med 6 miljoner siffror.

“Låt oss säga att detta är en tomtefartumme, alltså en tft, då kan vi direkt se att denna sträcka har längden tre tft, och att t ex denna är en halv tft lång.” Medan han pratade ritade han följande figur:

FIGUR 1

“Vidare kan vi mäta den här sträckan” han pekade nu på en lite kortare sträcka, “för om vi tar fem likadana av den och lägger ihop så får vi 3 tft, och vi säger då att en har längden 3/5 tft, osv.” Tomtemor såg ut som hon var på väg att säga något men förblev tyst, och tomtefar fortsatte med viktig röst.

“I princip kan man mäta upp allting nu så som jag visat här, men när man arbetar professionellt så har man en tumstock där alla olika sträckor redan finns avsatta för att det ska vara praktiskt. Om jag ville skulle jag ju kunna gå ut i verkstaden och tillverka en tomtefartumstock nu.” Tomtefar såg mycket nöjd ut och la in en stor slev med gröt. Nu bröt tomtemor in.

“Alla tal, alltså sträcklängder, man kan få på detta sätt som tomtefar beskriver kallas rationella, och redan tidigt i skolan har ni väl lärt er hur man räknar med rationella tal.”

“Självklart,” sa tonårsdottern medan nissen nickade lite mer tveksamt.

“Men alla sträckor kan inte mätas upp så som tomtefar sa; pröva med rätvinkliga trianglar så ska ni få se.” sa tomtemodern lite pillemariskt. Tonårsdottern som just läst om Pythagoras sats nappade på betet och sträckte sig över bordet efter tidningen och pennan, ritade upp en triangel

FIGUR 2

och började mumla,

“Om den ena kateten är tre tft och den här andra är fyra tft så blir, låt mig se nu” hon krafsade en kalkyl vid sidan,

“då ska hypotenusan i kvadrat vara 9 plus 16 som är 25, så hypotenusan är roten ur 25 som är 5; som är lätt att mäta; se där, det var väl inget svårt att mäta alla sidorna i en sådan triangel” sa hon. Ja se där, tänkte tomtefar men teg som vanligt. Nu drog tomtemor till sig tidningen och ritade en rätvinklig triangel med kateter med längden 1.

FIGUR 3

"OK, enligt Pythagoras igen ska $a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ så $a^2 = 2$. Då undrar vi förstås var a är." säger tonårsdottern.

"Då är förstås a lika med roten ur två" svarade nissen nöjt.

"Ja, det är helt riktigt" sa hans mor, och fortsatte

" men vad är då roten ur två annat än just det tal vars kvadrat är två; och hur vet du att det alls finns ett sådant tal, och om det finns, hur kan man då ta reda på vad det är?"

" Men det är väl klart att det måste finnas eftersom hypotenusan finns och den måste ju vara något" sa sonen bestämt.

"Men hur kan du veta att hypotenusan måste gå att mäta" sa tonårsdottern, som i vanliga fall inte skulle tvivlat ett ögonblick men som nu såg en logisk lucka här. Tomtemor, som ville undvika en öppen dispyt om detta filosofiska problem försökte leda in diskussionen på en mer praktisk fråga.

"Ja, om vi tror på, eller bestämmer oss för, att sträckan måste svara mot ett tal, så kan vi förstås kalla detta tal $\sqrt{2}$, men vad är det då för tal? Vi kanske kan pröva oss fram. Det gäller alltså att hitta ett tal så att kvadraten är precis två."

Tomtemor bad nissen plocka fram sin räknedosa, och så satte de igång att pröva olika tal. De försökte först med $1,4$; om man tar $1,4^2$, dvs $1,4 \cdot 1,4$, så får man $1,96$ som ju är mindre än 2. Också $1,41^2$ visade sig vara mindre än 2 medan $1,42^2$ blir större än två så om talet $\sqrt{2}$ finns, vilket ju nissen redan bestämt sig för att det gör, så bör det ligga mellan $1,41$ och $1,42$.

"Notera att skillnaden mellan dessa tal bara är en hundradel, så vi har alltså bestämt talet $\sqrt{2}$ ganska noggrant redan," sa tomtemor,

"ja, om det nu finns" fyllde dottern i. De prövade vidare en liten stund och fann att

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,4142,$$

och sålunda hade de ringat in talet på en tusendel när.

"Det är ju klart att vi kan fortsätta så här hur länge vi vill." sa tonårsdottern nu.

"Nä men till slut räcker inte räknaren till, den har bara nio siffror" påpekade nissen.

" Ja men i princip kan vi ju utföra de här multiplikationerna för hand" kontrade tonårsdottern. [2]

"Fast det skulle bli oändligt jobbigt, och så hade det bergis blivit fel, i alla fall om du skulle göra det" inflikade nissen. Modern låtsades inte höra utan fortsatte,

"Men fortfarande vet vi ju inte säkert att talet finns; men nu gör vi som så ofta i matematik; vi bestämmer oss för att det finns ett tal som precis är det man får genom att räkna som vi har gjort. Vi säger alltså

[2] Metoden som tomtarna utnyttjar här fungerar i princip men det finns metoder (algoritmer) som genom mycket färre beräkningar (alltså snabbare!) ger god noggrannhet; vi hänvisar till läroböcker i matematisk analys för detta.

att $\sqrt{2}$ är den oändliga decimalutvecklingen $1,141....$ Vi kan förstås aldrig skriva upp alla decimalerna för de är oändligt många men vi kan skriva upp så många som man önskar, och på så sätt ange ett tal som ligger så nära $\sqrt{2}$ som man vill."

"Men det är väl fusk att bara bestämma sig för att talet finns" sa barnen nästan i mun på varandra,

"Då kan jag ju lika gärna säga att det finns ett tal x sådant att kvadraten är minus två" sa tonårsdottern. Nu var tomtemor mycket nöjd för det hela hade gått bättre än hon hade vågat hoppas. Nu gällde det bara att knyta ihop säcken.

"Jo ser ni, poängen här är att i matematiken får man gärna hitta på, alltså införa, saker, t ex tal med vissa egenskaper, bara man kan försäkra sig om att det hela hänger ihop. Om vi t ex sa att det fanns ett tal som var både större och mindre än 2 på en gång så skulle det inte gå så bra; men man säger helt enkelt, ja det är inte alls så enkelt egentligen, att varje tänkbar decimalutveckling svarar mot, eller om ni så vill, är ett tal. Sådana tal kallas reella. Man måste sedan då bevisa att de uppfyller vissa räkneregler, och de räknereglerna har ni ju också lärt er i skolan, fast utan att någon sagt varför de gäller. Men allt sådant kan man kontrollera om man vill."[3]

Tomtemor som under senaste året hade läst en bok i algebra, om ringar och kroppar, hade ganska klart för sig hur man kan göra en sådan kontroll, men insåg också väl att det inte var något som passade för en middagskonversation. Hon fortsatte därför istället,

"Slutsatsen blir alltså att varje sträcka går att mäta, alltså svarar mot ett reellt tal, eller om man så vill en punkt på den linjal som tomtefar tänkte göra i verkstaden, vi kan ju också som man brukar göra kalla den för tallinjen." [4] Efter detta långa inlägg trodde tomtemor att barnen skulle tröttna, men de gjorde de inte alls.

Är $\sqrt{2}$ ett rationellt tal?

Tonårsdottern försökte nu samla ihop tankarna,

"Men vänta lite ..." började hon,

"nu har vi väl förstått då att det går att skriva upp tal, decimaltal, som ligger hur nära $\sqrt{2}$ som helst, och att det talet finns i någon vettig mening, men..." man såg nu att hon tänkte intensivt,

"sa du inte att man verkligen behövde reella tal, att man inte kunde få alla tal så som pappa sa, som ett heltal genom ett annat?"

" Oj då," sa tomtemor, och såg för ovanlighetens skull lite förvirrad ut,

"visst ja, det var ju det vi skulle göra, prata om varför $\sqrt{2}$ är irrationellt. Redan i antiken visste folk att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Det gäller alltså

[3] Man kan även införa tal c sådana att $c^2 = -2$ som dottern tar upp; man får då så kallade komplexa tal.

[4] Noga taget, en liten bit av den positiva delan av tallinjen.

at visa att det inte finns två heltal p och q sådana att p/q i kvadrat blir precis två. Jag kan visa er varför, fast vi får vänta tills vi har dukat av för vi måste nog sitta bredvid varandra och titta på samma papper."

"Men," sa tomtefar, som inte hade gett upp än idag, utan försökte delta igen,

"Igår sa du ju att det finns oändligt många naturliga tal $1, 2, 3, ...$ osv, då måste det ju ta oändligt lång tid att pröva för alla tal p och q om kvadraten på p genom q är två?"

Tomtemor tittade med förvånad min på sin make, för hon var inte van vid att han utryckte sig med sådan skärpa. Hon ville absolut inte få honom at känna sig desavouerad denna gång samtidigt som hon var tvungen att i viss mening säga emot.

" Visst är det intressant att oändligheten kommer in här igen" började hon så positivt hon kunde,

" men poängen med argumentet jag ska ge är att man inte behöver kolla alla tal, man visar istället att om man antar att sådana tal p och q skulle finnas så leder det till en motsägelse, alltså en absurditet."

"Jag tycker det bara verkar som du försöker säga emot mig som vanligt, och det tycker jag är lite absurt, om jag nu alls vet vad det betyder" sa tomtefar och började resa sig,

"men medan ni tjafsar vidare om detta så har jag viktigt arbete som väntar i verkstaden, och för den delen har jag arbetat med tumstock i trettio år utan att behöva bekymra mig om roten ur två" fnös han medan han försvann ut och tomtemor reste sig.

Medan tomtemor dukade av gick nissen och hämtade ett rutblock för att det skulle finnas gott om plats att skriva på. Tomtemor tog hatten av en penna och började prata igen.

"Själva formuleringen av påståendet involverar alltså oändligheten, eftersom det finns oändligt många heltal. Precis som tomtefar säger så kan man inte pröva med alla tal; vad man istället gör är att man visar att om vi antar att det finns sådan tal p och q så att kvadraten på p/q blir 2, dvs att $p^2/q^2 = 2$, eller hur," hon skrev på pappret medan hon talade och tittade sedan på sina barn ett i taget för att kontrollera att de var med innan hon fortsatte,

FIGUR 3.5

"så leder detta till en motsägelse, alltså till något som absolut inte kan vara sant. Detta uttrycker vi sedan som att det inte finns sådana tal p och q, alltså att p/q inte är rationellt." Hon gjorde en kort pus innan hon fortsatte, “Om vi nu alltså antar att talen finns så kan vi också lika gärna anta att åtminstone ett av dem är udda, för om båda är jämna kan vi förkorta med två.”

“OK då” sa dottern, och nissen nickade tankfullt.

“ Men om $p^2/q^2 = 2$ så är ju $p^2 = 2q^2$ och alltså är p^2 delbart med två och alltså jämnt och alltså är p jämnt.”

“ Ja, för jämnt gånger jämnt är jämnt och udda gånger udda blir udda” fyllde dottern i.

“ Men då är alltså $p = 2m$ för något heltal m, och då får vi att $4m^2 = 2q^2$ så $2m^2 = q^2$ så q är jämnt; men detta är en motsägelse eftersom vi antog att ett av dem var udda från början” avslutade tomtemor med en viss triumf i rösten. Medan barnen tankfullt stirrade på blocket reste sig tomtemor och började slamra i diskhon.

“ Detta var ju buslistigt” sa nissen glatt, för han insåg att han hade förstått nu.

“Det här sättet att resonera är ganska oomtvistat” sa tomtemor från diskbänken.

“det är en annan sak om man vill visa att vissa tal verkligen finns; då finns det sätt att göra som inte alla matematiker accepterar. Om man kan visa upp talen som har egenskaperna man vill så är det förstås inga problem, men ... ”

“Jaså, det låter intressant” avbröt dottern, medan hon försiktigt började resa sig och gå, nissen såg också ut som han var på väg, och tomtemor som var glad att de orkat hänga med så långt, gjorde inga försök att hålla dem kvar. Efter disken började hon satte hon istället igång att baka en chokladkaka för hon visste av erfarenhet att det brukade hjälpa henna att samla tankarna. Efter en liten stund började hon erinra sig den föreläsning som hade handlat om sådana här frågor, och hon mindes att hon fått se ett enkelt exempel på hur man kan visa att tal med vissa egenskaper finns utan att plocka fram dem.

Kan man visa att tal finns utan att hitta dem?

Påståendet “det finns två naturliga tal större än 1 sådana att produkten är 123” är tämligen okomplicerat, för eftersom båda talen ju då måste vara mindre än 123, är det bara att sätta igång att pröva alla sådana; på samma sätt om man byter 123 mot 123123 eller vilket annat tal som helst.[5] Även påståendet “det finns ett tomtepar som heter Nilsson som har 16 barn” uppfattar de flesta som ett påstående som självklart är sant eller falskt, även om det verkar hopplöst svårt att säkert kontrollera *huruvida* det är sant eller inte. I princip är det ju ändå bara att fråga alla tomtepar som heter Nilsson hur många barn de har. Däremot har i allmänhet inte påståenden som “tomtefar borde

[5] Det gället alltså att avgöra huruvida talet 123 eller vilket det nu är, är ett primtal eller inte. Om talet är stort är detta en svår eller omöjlig uppgift även för mycket snabba datorer, och detta faktum utnyttjas för kodning.

äta mindre gröt" något absolut sanningsvärde, tänkte tomtemor och fnissade lite för sig själv, för här råder ju delade meningar.

Hon tänkte nu igen på påståendet "det finns två heltal p och q sådana att $p^2/q^2 = 2$" som de nyss hade pratat om. I detta fall kunde man ju visa att detta påstående leder till en motsägelse, och det medför definitivt att två sådana tal inte kan finnas, dvs att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Men är det självklart att varje sådant likande påstående är sant eller falskt; precis som tomtefar spontant påpekat så finns ju ingen möjlighet att kolla för varje par av tal p och q eftersom det finns oändligt många sådana par ..... ?

Hon försökte nu febrilt erinra sig exemplet från föreläsningen; skulle hon verkligen behöva börja rota efter gamla anteckningar. Så småningom mindes hon att det var något med irrationella tal upphöjt till varandra, och när hon fått in kakan i ugnen och satt sig med blocket som nissen hade lämnat kvar på bordet så började det klarna, men hon hade inte fått ihop hela tankegången förrän det var dags att ta ut kakan. Mumsande på en rejäl bit gick hon igenom det hela igen för sig själv:

Påståendet är "det finns irrationella positiva tal a och b sådana att a^b är rationellt." Om man tror på, vilket alltså inte alls är självklart, att påståendet har ett sanningsvärde, dvs är sant eller falskt, och man kan visa att antagandet att det *inte* är sant leder till en motsägelse, så måste det ju då vara sant, dvs det finns ett sådant par av tal a och b. En matematiker med konstruktivistiskt synsätt accepterar inte en sådan argumentation utan kräver att man verkligen kan plocka fram talen a och b för att kunna hävda att de finns. Tomtemor mindes också att hennes lärare hade påpekat att diskussioner om frågor som denna hade varit väldigt livliga kring förra sekelskiftet, men att de flesta matematiker nu för tiden accepterar ickekonstruktivistiska argument.

Tonårsdottern som hade känt doften av nygräddad kaka kom ned från sitt rum för att nypa en bit, och tomtemor kunde inte låta bli att passa på att pröva om hon kunde förklara argumentet.

"Du" sa hon och gjorde vad hon kunde för se intresseväckande ut, samtidigt som hon försökte minnas om dottern hade läst om vad det innebär att ta ett positivt tal upphöjt till ett annat positivt tal som inte är ett heltal, dvs allmän potensräkning.

"Vet du om att det finns två positiva tal a och b sådana att a^b är rationellt." Tomtemor skrev a^b rätt stort på ett papper och höll upp så att dottern skulle kunna se.

"Jaså" svarade dottern med måttlig entusiasm,

"vilka då då?"

"Poängen är att jag kan visa att de finns utan att veta vilka de är" sa tomtemor, och tyckte sig se ett stigande intresse hos dottern.

" Du vet ju redan att $\sqrt{2}$ är irrationellt; tänk nu att $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ är rationellt, då vore vi ju klara, eller hur?"

"Jovisst, då låter vi ju bara a och b båda vara $\sqrt{2}$, men hur kan vi kolla det då?"

"Om nu $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ inte är rationellt, alltså om det är irrationellt, då kan vi ta detta tal som a och så tar vi b till $\sqrt{2}$. Då får vi ... du vet väl hur man räknar med potenser" Tomtemor gjorde nu en uträkning på pappret,

FIGUR 4

"Och 2 är ju ett typiskt rationellt tal" sa dottern och visade med sitt ansiktsuttryck att hon började fatta det hela.

"Så alltså är antingen paret $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ sådant vi söker, eller så är paret $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$ det." sa tomtemor nöjt, och blev ännu nöjdare när hon fann att dottern nickade instämmande och sa

"Fast vi vet fortfarande inte vilket av paren som har egenskapen."

"Nä just det; på den föreläsningen när jag fick se detta sa läraren att man på andra sätt faktiskt kunde avgöra vilket av dem det är, eller om det möjligen är båda," men det spelar ju mindre roll just nu. [6]

"Dessutom visar vårt resonemang här att det finns åtminstone två tomtar i den här familjen som kan potensräkning" sa tomtemor och log brett.

"Jag tror jag kan bevisa att det finns högst två" fnissade dottern,

"men kan vi inte prata om istället att det finns två nissar i min klass som jag tror vill vara lite mer än bara kompis med mig" sa dottern som alltid hade haft en förtrolig relation till sin mor.

Kan man stämma ett piano?

Tomtefar hade spelat piano en hel del i sin ungdom och var fortfarande en passionerad amatörmusiker, i synnerhet efter ett par tomteöl på lördagseftermiddagen. Själv menade han förstås på att han var upptagen av arbete i verkstaden hela veckan i övrigt. Tomtenissen som själv

[6] Av pedagogiska skäl riggade tomtemor argumentet för sin dotter lite annorlunda än hon först hade tänkt igenom det; först hade hon utfört det som ett rent motsägelsebevis: Påståendet är att det finns positiva irrationella tal a och b sådana att a^b är rationellt. Om man antar att detta inte är sant så antar man alltså att för varje par av positiva irrationella tal a och b så är a^b också irrationellt. Eftersom $\sqrt{2}$ är irrationellt är alltså $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ också irrationellt. Men då är ju även $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ irrationellt, vilket är en motsägelse eftersom det senare talet är lika med 2. Antagandet att påståendet inte är sant leder alltså till en motsägelse, och om man accepterar ickekonstruktivistiska argument så kan man alltså sluta sig till att påståendet är sant.

hade ett utvecklat musiköra ropade att tomtefar borde ta och stämma pianot först.

“Men det går ju inte att stämma ett piano” sa tonårsdottern. Far och son stirrade frågande på henne.

“Jag berättade för fröken igår att vi hade pratat hemma om att roten ur två är irrationellt och då sa hon att det medför att man inte kan stämma ett piano.” Glad över uppmärksamheten fortsatte hon

“Vi kan ta en sträng vilken som helst; om man knäpper på den så rör den sig fram och tillbaks ett visst antal gånger varje sekund, det spelar ingen roll hur många, men låt oss säga 440; då blir det tonen A.

“ Ja, ettstrukna A har frekvensen 440 ja” sa tomtefar,

“ Fast man kan i princip ta vad som helst, precis som din hittepåtomtetumme du ritade igår.” Hon tittade på sin far som nickade tveksamt.

“Om man nu har en annan sträng som man vill spela på samtidigt, och det ska låta bra ihop, så måste den ha en frekvens som är ett rationellt tal gånger den första strängens frekvens. Det enklaste är förstås om den har precis samma frekvens för då blir det ju precis samma ton, men nästan lika enkelt är det om den har precis dubbla frekvensen, då blir det en oktav upp, som så här . . . ”

När hon kommit så långt stämde hon upp de första tonerna i “Over the rainbow” som ju alla tomtar känner väl till från julafton.

“Nästa intervall är en ren kvint, det är nu det börjar bli spännande, för då ska den andra strängen ha frekvensen 3/2 gånger den första; alltså som första två tonerna i “Blinka lilla...””

“Det låter mer som en prim tycker jag” flinade nissen lite elakt,

“men du kanske menar andra och tredje . . . ”

“Nå,” avbröt tomtefar,

“men man ändrar ju tonhöjden genom att antingen spänna strängen mer, eller genom att korta av den . . . ” sådant här tyckte han sig kunna väl eftersom han byggt många enkla strängintrument i verkstaden under årens lopp.

“så det är väl bara att stämma pianot så att det stämmer. . . ” men han började samtidigt tveka, för han visste erfarenhetsmässigt att man, om man t ex stämmer en gitarr , inte kan få till det så att det klingar helt rent, utan man måste låta det “sväva” lite. För pianot brukade han anlita en pianostämmare om det inte rörde sig om att justera någon enstaka sträng bara. Han hade plötsligt blivit mycket intresserad av vad dottern hade att säga.

“Jo, i vår musik delar vi upp oktaven i tolv delar, och eftersom folk vill kunna börja samma melodi på lite olika toner, eller så att inte alla sånger ska gå i samma tonart, så måste avståndet mellan två på varandra följande toner, det är det som egentligen heter halvtoner alltså, eller sekunder som somliga viktigpettrar skulle sagt” hon glodde på sin lillebror, "vara lika stort; men sen kan det inte stämma då eftersom roten ur två är irrationellt, men jag tror inte jag kommer ihåg riktigt hur fröken menade sen."

Tomtemor som hade kommit in i rummet lyssnade nu också intresserat och sa

"Detta kände jag inte till, men det måste vi väl kunna klura ut nu" sa hon och grep en penna och började skriva på baksidan av ett reklamblad som någon slängt på bordet.

"Säg att grundtonens frekvens är c och att man ska multiplicera med x för att få en halvton högre"

"Men var får du x ifrån, vad är det" frågade tomtenissen.

"Det vet jag inte än, men jag vet att när man gått upp 12 halvtoner så ska det bli en hel oktav, och den måste väl i alla fall ha precis dubbla frekvensen; så om vi börjar med säg tonen C så kommer $Ciss$ att ha frekvensen xc, då kommer D att ha frekvensen $x(xc) = x^2c$, Diss får frekvensen x^3c osv. Alltså ska $x^{12}c = 2c$ så $x = 2^{1/12}$. Om vi hade en ren kvint på pianot så skulle tonen G, som är 7 halvtoner upp, ha $3/2c$ dvs vi skulle ha att $2^{7/12} = 3/2$. Men låt se nu, det kan inte vara så för då skulle ju $2^{7/2} = 3^6/2^6$, dvs $\sqrt{2} = 3^6/2^6 \cdot 2^3$, och det kan ju inte vara sant eftersom $\sqrt{2}$ inte är rationellt."

Nissen gick och hämtade sin miniräknare, " kolla här" sa han, "$2^{7/12} = 1,4983071$; det är ju faktiskt mycket nära 1/2." "Ja, det förklarar ju varför man faktiskt ändå kan dela in oktaven i tolv halvtoner så att intervallet mellan första och sjunde nästan låter som en ren kvint" sa tomtemor belåtet.

FIGUR 5

Tomtefar började minnas att han hört talas någon gång att någon tomte som hette Bach hade skrivit en cykel av stycken som han kallade Der Wohltemperierte Klavier, som gick i alla de olika tolv tonarterna, och där poängen var att visa att kunde stämma pianot, eller cembalo som det väl var på den tiden, på ett sådant sätt att alla styckena kunde spelas i ett sträck utan att stämma om emellan. Man brukar ju tala om att man har tempererad stämning på pianot, mindes han nu också och blev irriterad över att han inte tänkt på detta från första början; nu kanske det var lika bra att hålla tyst. [7]

" Men varför ska det vara en rationell multipel?" frågade nissen.

"Jo det måste vara ganska enkelt tal för annars låter det också fult." svarade tonårsdottern inte helt övertygande, och tomtemor bröt in,

[7] En kammarorkester, t ex en stråkkvartett, spelar inte tempererat utan med rena intervall, dvs rena kvinter etc, och samma gäller för vokalensembler; i sådana sammanhang kommer alltså ett piano att låta falskt för känsliga öron.

“Jag tror att det har att göra med att när när två toner spelas samtidigt så bildas i örat ytterligare toner och om . . . äsch det kanske är bäst att kolla upp i någon bok om vågrörelselära” tomtemor gjorde en kort paus innan hon fortsatte

“men det är i alla fall därför som en sträng låter vackrare än en trumma.”

Tomtemor gick fram till väggen och tog ner tomtefars gitarr och slog an en sträng och visade.

“Titta här, om jag nu kortar av strängen till hälften så kommer den att svänga med precis dubbla frekvensen” hon satte fingret vid tolfte bandet på gitarrhalsen och slog an strängen igen.

Hon tog bort fingret igen från halsen och slog an strängen igen, “poängen är att när man slår till strängen så kommer det utöver grundtonen även att alstras övertoner, nämligen de med frekvenser som är två gånger, tre gånger, fyra gånger . . . och så vidare, grundtonens frekvens. det beror på att utöver att hela strängen svänger med sin frekvens så kommer de båda stränghalvorna att svänga med dubbla frekvensen, och så vidare.”

Hon visade genom att först slå an strängen och sedan dämpa den lätt mitt på; då stoppar hon upp strängens grundsvängning så att bara de båda halvornas svängning fortsätter; de har precis den dubbla frekvensen. Sedan slog hon an strängen igen och dämpade den en tredjedel in; då stoppar hon både grundfrekvensen och den dubbla, så det som klingar är en ton med frekvens tre gånger grundtonen, alltså en oktav plus en (ren) kvint över grundtonen.

“Som tur är låter nu alla dessa toner bra ihop. Vill man ha jämförelsevis starka övertoner ska man slå an strängen nära stallet, och vill man ha svagare övertoner ska man slå mitt på; starkare övertoner ger liksom ett vassare ljud.”

Tomtemor höll just på att läsa en bok om Fourierserier och lösningar till den så kallade vågekvationen så hon hade detta mycket aktuellt.

“Om man däremot har ett tvådimensionellt membran, t ex ett trumskinn, så blir det utöver grundtonen, en massa övertoner som har frekvenser som är irrationella tal gånger grundtonens frekvens, det kan man räkna ut, och därför klingar en trumma inte lika vackert som en sträng; men låt oss nu förbereda lördagsmiddagen istället.”

Utmärkt förslag, tänkte tomtefar och gick och hämtade ytterligare en tomteöl.

Kan en tomte springa ifatt en sköldpadda?

“Vet ni vad” sa tomtenissen när de satt sig till bords några dagar senare, idag pratade fröken om att man trodde förr att det inte gick att springa ifatt en sköldpadda trots att den rör sig mycket långsammare än en tomte, det var väl ganska knäppt.”

“Det är det inte alls,” för tomtefar har väldiga problem med jaga ut och hämta ved till spisen, och vedstapeln ute på gården står ändå där den står och rör sig inte ur fläcken”, sa tomtemor och klappade tomtefar vänskapligt på axeln.

“men titta här” sa tomtenissen och började läsa högt ur en av sina skolböcker,

“Följande berömda argument för att detta inte skulle vara möjligt brukar tillskrivas den grekiske tänkaren Zenon från Elea som levde på 400-talet före vår tideräkning. Antag ett scenario där A (i den klassiska formuleringen är A Akilles) försöker jaga ifatt sköldpaddan S, att båda rör sig med jämn fart och att A rör sig fortare än S. Efter ett tag kommer A fram till den plats där S startade men då har ju S hunnit förflytta sig en bit därifrån; efter ytterligare ett tag kommer ju A fram till denna plats, men återigen har ju då S hunnit förflytta sig ytterligare en bit etc. Slutsatsen ska då vara att A aldrig kommer ifatt S.”

“Löjligt va, det vet ju alla att han Akilles hinner ifatt, om han inte..”

“ Ja sa tomtemor, den filosofiska sidan av detta problem vet jag inte om jag kan säga så mycket om men det finns återigen en pragmatisk lösning i matematiken som . . . ” Hon åt lite gröt medan hon funderade på hur hon bäst skulle fortsätta.

“ Vi kanske kan prata om ett lite enklare problem först, där kärnpunkten framgår lite tydligare. Tror ni att en vanlig hederlig tomte kan fotvandra till nordpolen?”

Kan en tomte fotvandra till nordpolen?

Tanken hade aldrig föresvävat tomtefar att någon kunde komma på iden att försöka gå till nordpolen när det fanns renslädar, så han tyckte det lät nästan mer krystat än att jaga efter sköldpaddor, men bet ihop även denna gång.

“Ja det går väl men det skulle ju ta oändligt lång tid, så det är väl ingen som vill göra.” Tomtemor stannade upp och begrundade en kort stund sonens tämligen motsägelsefulla uttalande; eller åtminstone märkliga, i ljuset av den senaste tidens middagsdiskussioner; eller vad det hon som börjat bli knepig och märka ord?

“Dessutom är det väl faktiskt öppet hav man måste ta sig över innan man kommer fram till istäcket, eller är det inte så pappa” inflikade dottern och tittade frågande på sin far. Tomtefar som ju förstås kände vägen till nordpolen väl nickande bekräftande så att tofsen på luvan nästan åkte ned i ansiktet.

“För att det inte ska kännas fullt lika övermäktigt för er” sa tomtemor

“så låt oss istället tänka på en tomte som bara befinner sig två tomtemil söder om nordpolen. Antag vidare att han kan hålla en jämn fart på 1 mil i timmen; det är rätt snabbt, närmast joggingfart, men vi får anta att han är en någorlunda vältränad tomtegubbe, och inte som ...” hon sneglade på sin make utan att avsluta meningen.

“Med ett liknande argument som i din skolbok kan man hävda att han aldrig kommer fram till nordpolen. Nämligen; efter en timme har han hunnit en mil, efter ytterligare en halvtimme har han hunnit en halvmil, efter ytterligare en kvart har han hunnit en kvarts mil till etc; men fastän han hela tiden närmar sig nordpolen så befinner han sig likväl en bit ifrån. Går det alltså inte att promenera till nordpolen? Låt oss rita ut de olika tidpunkter vi uttalar oss om på en tallinje;”

Här böjde sig tomtemor fram och nöp ett rutat block som stack upp ur tomtenissens ryggsäck som han hade hängt över stolsryggen. Tomtefar stirrade ogillande medan hans hustru sköt undan sin ännu inte helt urätna gröttallrik för att få plats att skriva på blocket. I vanliga fall vankades bannor om någon började greja med ovidkommande saker vid bordet, men det gällde tydligen inte idag, tänkte han uppgivet.

“alltså talen” fortfor tomtemor och skrev medan hon talade,

FIGUR 6

“Vi ser att alla dessa tal är mindre än talet 2 och i resonemanget ovan uttalar vi oss alltså bara om var han befinner sig innan 2 timmar har förlöpt. Vi ser också i figuren att man kommer närmare och närmare 2 ju fler termer man tar med. Alltså föreligger ingen motsägelse och som vi kan förvänta oss når vår vandrande tomte fram till nordpolen efter två timmar.”

“Ja men det var väl inte så märkligt, nordpolen ligger ju lika stilla som vedstapeln på gården och då och då lyckas ju till och med pappa nå fram dit och knipa några vedträn” sa dottern med spelat allvarlig min.

Det går att springa ifatt en sköldpadda

“Men så bra” sa tomtemor mer för sig själv, bläddrade fram ett nytt blad och höjde rösten,

“för nu kan vi få en belysning av den första paradoxen på samma sätt. För enkelhets skull antar vi att A befinner sig en längdenhet bakom S

när vi börjar betrakta skeendet, säg en mil, att A rör sig med farten en mil per timme och S hälften så fort[8].

Efter en timme har A masat sig fram till den punkt där S startade, men då har förstås S hunnit ytterligare 1/2 mil längre fram etc. Men liksom ovan finner vi att beskrivningen bara handlar om vad som händer innan två timmar har förlöpt. Under denna tid kommer A att befinna sig bakom S. Men efter precis två timmar kommer han att ha hunnit 2 mil, medan S bara har hunnit en, och följaktligen hinner A just då ifatt S."

Tomtefar tittade roat på sin hustru medan hon pratade och ritade, och kunde sedan inte längre hålla tyst.

"Kära tomtemor, du har alltså nu lyckats förklara för våra halvvuxna barn att en någorlunda kurant tomte kan springa ifatt en sköldpadda om han får två timmar på sig; lysande!"

"Det var ju inte det som var poängen, utan hur matematiken kan lösa upp paradoxen" svarade tomtemor något förnärmad. Tomtefar förstod fortfarande inte poängen med att barnen fick lära sig en massa strunt i skolan som det tog en hel måltid för föräldrarna att ta ur dem, men fann för gott att återgå till sitt tigande, när han såg tomtemors min. Tomtemor tog istället tillfället att fortsätta.

"Det hela blir faktiskt mycket intressantare om vi tänker igen på en tomte som promenerar mot nordpolen men antar att han snabbt blir väldigt trött och går allt långsammare och långsammare."

"Måste du prata om pappa hela tiden" sa dottern.

Tomtefar fann att detta var ett lämpligt tillfälle att tacka för maten och smita iväg, men nissen som suttit tyst ett tag bröt nu in,

"Men vänta lite, blir det där verkligen två eller bara hur nära som helst?

"Vänta tills jag satt på kaffet så ska vi se om vi kan reda ut detta" sa tomtemor och tittade på sina barn,

"kan ni hjälpa till att plocka undan lite här först."

Oändliga summor

När tomtemor fått sitt kaffe och de delat upp resterna av chokladkakan så tog tomtemor blocket och pennan och började förklara.

[8]Att tomtemor väljer att anta att sköldpaddan rör sig just hälften så fort är bara för att det ska bli enkelt; den som hänger upp sig på att detta inte är rimligt kan antingen byta ut sköldpaddan mot ett lämpligare djur, eller byta faktorn 1/2 mot något mer passande, i princip fungerar det följande resonemanget likadant i alla fall.

"Som vi redan sett så är talen

$$\begin{gathered} 1 \\ 1+\frac{1}{2} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\ \cdots \end{gathered}$$

alla mindre än 2," hon pekade på blocket medan hon pratade,[9]

"men att de alltmer närmar sig talet två i meningen att man så småningom kommer förbi varje tal som är mindre än 2, alltså man kommer "hur nära som helst"."

"Det kan kännas naturligt att tänka sig intuitivt att om man lägger ihop "alla" talen 1, 1/2, 1/4, 1/8 och så vidare så får man summan två, och därför skriver man ofta så här" fortsatte tomtemor och skrev

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$$

på pappret.

"Men kom ihåg att detta bara är ett skrivsätt som i bästa fall tilltalar intuitionen eller fantasin. Vad vi exakt *menar* är bara att hur många termer vi än tar med så får man något som är mindre än 2, samt att man genom att ta med tillräckligt många termer kan få något som är större än varje givet tal mindre än två."

Barnen tittade stint på sin mor och sa inget, så hon fortsatte

"fast många matematiker upplever det nog som att man verkligen lägger ihop ett oändligt antal termer." [10]

"Vi pratade faktiskt precis om en sådan här oändlig summa häromdan, men kanske utan att ni tänkte på det" sa hon nu och såg lite finurlig ut medan hon skrev

$$\sqrt{2}=3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots,$$

"alltså; oändliga decimalutvecklingar är just inget annat än en typ av oändliga summor" och barnen nickade fundersamt.

"Men vänta lite" sa dottern efter ett tag

"t ex kan vi ju då lika gärna skriva"

---

[9]se figur?? ovan

[10]Sådana här summor med oändligt många termer kallas också ofta serier. Man måste vara lite försiktig när man handskas med serier; om man räknar precis som man får göra med ändliga summor så kan det leda till tokigheter.

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

"istället för"

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$$

"Javisst, det är förstås samma sak" sa tomtemodern mycket belåtet.[11] Hon funderade ett kort tag om hon skulle leda in diskussionen på gränsvärden mer allmänt, men fann att det nog skulle leda för långt bort och sa istället

"Låt oss istället diskutera tomten den trötta tomten lite."

Kan en tomte fotvandra till nordpolen även om han blir trött?

"Om vår tomte håller en jämn fart på t ex 1 mil per timme i riktning mot nordpolen så kommer han förstås fram förr eller senare, hur långt bort han än befinner sig när han startar" började tomtemor och barnen nickade

"men antag nu att vår vandrande tomte trots allt inte var så vältränad som vi trodde. Vi kan då tänka oss att han första timmen, eventuellt med lite vila, det har ingen betydelse för resonemanget men gör det hela kanske något mer realistiskt, hinner en mil igen, men att han under andra timmen bara hinner en halvmil, under tredje timmen bara mäktar med en kvarts mil osv. Kommer han då någonsin fram?"

Hon gjorde en paus så att barnen skulle få tid att tänka efter. Tonårsdottern tittade lite frågande på henne och sa

"men vi sa ju att han då aldrig kommer längre än högst två mil..."

"så om han startar två mil från nordpolen så kommer han ju inte fram" fyllde nissen i och såg nöjd ut.

"så vore det inte bättre att han tog släden som alla vettiga tomtar gör" tillade han, ännu lite nöjdare.

"Men däremot kommer han hur nära som helst om han håller på tillräckligt länge" sa tonårsdottern,

"Ja just det; om man drar en aldrig så liten cirkel kring själva nordpolen så kommer tomten att så småningom komma innanför den cirkeln" fyllde modern i.

"Men om han nu blev lika fort trött och hade startat tre mil från P istället för 2; då hade han väl inte ens kommit i närheten?" frågade

---

[11]Ett annat populärt exempel är förstås

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

som (med lämplig fortsättning) ger det tal som brukar betecknas med π och som svarar mot längden av en halvcirkel med radien 1.

nissen nu. Tomtemor nickade belåtet; det var tydligt att sonen hade förstått,

“nä just precis, då kommer han som bäst mycket nära cirkeln med radie en mil kring nordpolen” sa hon och pekade i figuren.

FIGUR 7 (eventuellt!)

Den harmoniska serien

“Antag nu istället att han inte tröttnar lika snabbt; säg att han tredje timmen hinner 1/3 mil, fjärde timmen 1/4 mil etc. Detta svarar nu mot den oändliga summan…” sa tomtemor och skrev

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdots .$$

på pappret.

“Eftersom $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$ redan det är större än 2 är det klart att han hinner fram till nordpolen redan under den fjärde timmen om han startar två mil bort som tidigare.”

“Men hur skulle det ha gått om han istället startade 10 mil från nordpolen, eller kanske 100 mil?”

“ Eftersom han går kortare och kortare sträcka för varje timme så kan han ju inte komma hur långt som helst” sa tomtenissen så bestämt han kunde, och fortsatte

“det är väl bara att räkna ut vad den här oändliga summan blir.”

“Men hur kan du göra det då, det kan ju ta oändligt lång tid, i alla fall för dig” sa tonårsdottern retsamt. Nöjd med att barnen hängt med så långt bröt nu tomtemor in och sa

“ Det kanske något förbluffande svaret är att han ändå så småningom faktiskt når fram, oavsett hur långt bort han startar; fast det kan ta mycket lång tid.”

[12]

“Men vänta nu, hur kan detta stämma” protesterade genast nissen, “talen, alltså vad heter det, termerna blir ju mindre och mindre hela tiden”

“Ja just det, det är riktigt” svarade tomtemor,

---

[12]För att komma 10 mil tar det ca 1000 timmar, och för 100 mil ca 10^{30} timmar, vilket är en ofantligt lång tid.

Man kan visa att om N är ett stort tal och man tar med N stycken termer i summan ovan så får man ett tal som ungefär är lika med $\log N$ (naturliga logaritmen). Detta innebär att man behöver ungefär $10^{0.3x}$ termer för att få summan x. Om man alltså vill uppnå summan 10 så behövs alltså ungefär $10^{0,3 \cdot 10} = 10^3$ dvs 1000 termer, och om man vill uppnå summan 100 så får man ta med ca 10^{30} termer.

“men de blir mindre och mindre såpass långsamt att summan av allihop ändå blir hur stor som helst.”

“Kan man verkligen förstå detta, är det inte bara en slags intellektuell lek” undrade tonårsdottern försiktigt.

“Om jag skriver så här; alltså grupperar temerna med parenteser så här” sa tomtemor och drog till sig blocket och skrev

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \\ + (\frac{1}{9} + \ldots \cdots + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}) + \ldots .$$

“så kan ni fundera ut varför summan blir oändligt stor medan jag börjar med disken”[13]

Tomtebarnen stirrade på detta medan deras mor diskade och när hon var klar och de hade pratat om detta en liten stund sa dottern,

“Ja, jag kanske förstår detta på sätt och vis, men det känns fortfarande som det är någon abstrakt lek bara, eller vad tycker du” och vände sig för en gångs skull till sin lillebror, som nickade instämmande.

“Vi kan titta på en mer praktisk konsekvens av att summan blir hur stor som helst” sa tomtemor efter ett kort tag,

“Kan du springa ut till tomtefar i verkstaden och hämta ett tiotal tegelstenar” fortsatte hon och vände sig till nissen,

“så ska jag visa att man kan stapla dem så att den översta ligger helt utanför bordskivan, så här utan att det rasar” sa hon och började rita en liten figur på ett papper

FIGUR 7

Nissen sprang ut till verkstaden. Tomtefar hade fått en stor beställning på schackbräden och var i full gång med att måla. När nissen ivrigt hade berättat vad hans mor tänkte göra blev tomtefar så tankfull att han inte märkte att han höll penseln så att det droppade färg som bildade små rutor på golvet.

“Det kan ju inte gå, det måste vara helt fel, nu skojar hon bara med dig” sa han slutligen,

“men ta dessa tegelstenarna då, bara du ser till att inte tappa dem på tårna” tillade han lite oroligt.

[13]Man kan övertyga sig om att uttrycket inom varje parentes är minst $1/2$; det sista talet i varje sådan summa är nämligen på formen 2^{-m} för något naturligt tal m, och summan inom parentesen består av 2^{m-1} termer som alla är större eller lika med det sista. Eftersom det finns hur många sådana parenteser som helst så kan man få hela summan att bli större än vilket givet tal som helst, bara man tar med tillräckligt många termer.

“Ska du inte följa med in och titta på” sa nissen ivrigt medan tomtefar började torka upp färgen.

“Men kom nu då” sa han och såg så bevekande ut att hans far kände sig tvingad att göra honom till viljes, muttrande över att det började förekomma mer och mer underliga påhitt. När han och nissen kom in i köket med tegelstenarna, hade tomtemor ritat följande mer detaljerade skiss

FIGUR 8

och höll på att förklara för dottern med ett resonemang om tyngdpunkter och annat.

“För att sammanfatta” hon vände sig nu till nissen och tomtefar

“så om stenarna är helt homogena så ska det teoretiskt vara möjligt att lägga de så här som i figurerna här; för att det ska vara lätt att se så har jag använt en längdenhet sådan att en tegelsten är två längdenheter lång; alltså om man bara har en sten så kan man låta upp till halva sticka ut över bordskanten utan att den trillar; i verkligheten måste man förstås ha en liten marginal” sa hon och prövade med en av stenarna medan tomtefar förskräckt slet åt sig golvmattan och knuffade in den under bordskanten.

“Akta nu så du inte tappar den bara”

sa han oroligt

“men visst det där tror vi väl på; nissen sa att du tänkte ha hela stenen utanför bordskivan.”

“Vänta bara” sa tomtemor.

“Om man tar använder fyra tegelstenar som i figuren här så ska det vara möjligt att få den översta att ligga helt utanför bordet utan att det rasar; om det inte går är marginalerna för små och då försöker vi med fem stycken. . . ”

“Om vi har tillgång til tillräckligt många stenar kan vi få den översta att ligga hur långt ut som helst, för den här oändliga summan blir hur stor som helst om man bara . . . ” började tonårsdottern förklara för tomtefar,

“Fast man måste bestämma från början hur långt ut den översta ska vara, för man måste ju börja bygga underifrån” tillade nissen förnumstigt, [14]

[14]För att unvika att tappa tegelstenar på tårna eller på parketten kan man med fördel använda någon slags lättare byggklossar; har man tillgång till en ordinärt utrustad barnkammare brukar man kunna hitta några rätblock i trä eller annat någorlunda homogent material, men även t ex Duplo-klossar går bra; dominobrickor kan duga i nödfall om man är någorlunda stadig på handen.

Och medan tomtemor står och försöker balansera tegelstenarna från bordskivan med barnen som intresserade åskådare, och tomtefar oroligt hämtar mattor att lägga under för att skydda parketten, så lämnar vi tomtefamiljen djupt inne i skogen.

Mats Andersson 2003