Pattes pysselhörna, del 2

Patte

November 15, 1995

Introduktion

Denna gång tänkte jag att vi skulle studera dualvariabler i LP, speciellt optimala sådana och deras relationer till begreppet *skuggpriser*.

Vi har alla undervisat på dualitet, och introducerat begreppet skuggpris för ett bivillkor som den marginella nyttan av en ytterligare enhets resurs (i fallet bivillkor av typen $\leq$ i ett maximeringsproblem). Vi har motiverat att dess värde ges av dualvariabeln för detta bivillkor genom att presentera formeln

$$y_i^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \frac{\partial(c_B^{\mathrm{T}} B^{-1} b)}{\partial b_i} = (c_B^{\mathrm{T}} B^{-1})_i, \tag{1}$$

och påvisat att dessa värden är optimala duala värden, samt visat var de kan identifieras i en optimaltablå i simplexmetoden.

Nu undrar vän av ordning, låt oss kalla henne för Torpa-Berit (varför skulle inte en backstu'sittare kunna fundera på sådant?; sådana underliga fördomar Ni har), förstås om denna formel *alltid* är giltig, om värdet av skuggpriset *alltid* återfinns i en optimaltablå (undantaget de skuggpris som motsvarar likhetsvillkor förstås), *varför* formeln är giltig, och, om den inte alltid är giltig, *när* den är det.

Frågorna

Er uppgift är att besvara hennes frågor. Vi tar en sak i taget, och mjukstartar med

Fråga 1. Betrakta LP-problemet

$$\begin{array}{llrcrcrcrcl} \min & z = & -3x_1 & - & x_2 & & & & & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \qquad (*) \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 2, \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & \geq & 0. \end{array}$$

Lös detta problem grafiskt med hjälp av en standardmetod. *Ledning:* den börjar på bokstaven s. Ta fram samtliga optimala tablåer. Ta sedan fram samtliga duallösningar, antingen grafiskt eller med hjälp av komplementaritet.

Fråga 2. Vad är skuggpriset för bivillkor $(*)$? Kan vi tala om *ett* skuggpris? Kan formeln (1) kan vara giltig, undrar Torpa-Berit nu, och kliar sig på sin skäggiga haka. Det är ju olika information i de olika optimaltablårna!

Fråga 3. Hur bör en korrekt formel se ut för beräkningen av marginella förändringen av z^* vid förändring uppåt respektive nedåt av ett högerled? *Ledning:* studera funktionen

$$f(\delta) = \min\{\, c^{\mathrm{T}} x \mid Ax = b + \delta; \quad x \geq 0 \,\}, \qquad \delta \in \Re^m,$$

och speciellt dess marginella förändring för δ nära noll.

Fråga 4. Applicera den korrekta formeln på exemplet för att beräkna marginella förändringen vid en ökning respektive en minskning av b_1. Skissa funktionen f för förändringar i b_1 och tolka resultatet genom att ange specialfallet av formeln för en-dimensionella störningar. Besvara fråga 2 genom att ange nödvändiga och tillräckliga villkor på egenskaper på funktionen f, och tolka detta i formeln (1).

Fråga 5. Formeln kan användas för att beräkna marginella förändringen av z^* vid förändring av hela vektorn b; använd formeln på exemplet för att beräkna den marginella förändringen vid en störning $\delta = (-.5, -.5)^{\mathrm{T}}$.

Fråga 6. Vi går tillbaka och tittar på optimaltablåerna. Kan man *alltid* identifiera marginalförändringen för ett enskilt högerled ur någon optimaltablå? Hur vet man vilket värde som är rätt beroende på om man är intresserad av en ökning eller minskning? Om svaret är nej (stackars oss), hur ska man då gå till väga?

Vi avslutar som vanligt med att tillsammans sjunga den glada signaturmelodin. Vinka med Era roliga hattar till tittarna! Vi ses nästa vecka. Hej då!