Pattes pysselhörna, del 3

Patte

February 1, 1996

Introduktion

I del tre av pysselhörnan skall vi studera flöden i nätverk, och speciellt grunderna för en typ av primala algoritmer (dvs. algoritmer som upprätthåller och förbättrar en primalt tillåten lösning).

I denna pysselhörna betraktar vi en riktad, kapaciterad graf, med ett flöde bestående av endast en (1) vara (som dock kan ha flera start- och slutnoder). Vi låter A beteckna anslutningsmatrisen för en riktad graf $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, där $\mathcal{N}$ och $\mathcal{A}$ är nod- respektive bågmängderna; vektorn $b \in \Re^{|\mathcal{N}|}$ är vektorn av tillgång/efterfrågan av den aktuella varan (med en teckenkonvention kompatibel med den hos A), och vektorn $u \in \Re_{+}^{|\mathcal{A}|}$ är en icke-negativ kapacitet hos flödet i grafen. Genomgående antas att det existerar ett tillåtet flöde. Mängden av tillåtna bågflöden är

$$F = \{ \, x \in \Re^{|\mathcal{A}|} \mid Ax = b; \quad x \leq u; \quad x \geq 0 \, \}.$$

Frågor

Fråga 1. Betrakta ett tillåtet flöde $\overline{x}$ i $\mathcal{G}$. Ange konen av tillåtna riktningar [tangentkonen $T_F(\overline{x})$] till F i $\overline{x}$.

Fråga 2. Ange en representation av $T_F(\overline{x})$ i nätverkstermer. *Tips:* använd representationssatsen.

Fråga 3. Ange en representation av $T_F(\overline{x})$ i algebraiska termer, och jämför de två representationerna.

Fråga 4. Antag att flödet i grafen $\mathcal{G}$ är associerat med en linjär kostnadsfunktion $x \mapsto c^{\mathrm{T}} x$, där $c \in \Re^{|\mathcal{A}|}$ är en konstant vektor. Ange optimalitetsvillkoren för problemet att minimera denna funktion över F.

Fråga 5. Föreslå ett (enkelt) subproblem för att hitta en förbättrande riktning (tillåten descentriktning) från ett icke-optimalt, tillåtet flöde, genom att utnyttja ovanstående. Beskriv hur det kan lösas, och hur det detekterar optimalitet i förekommande fall.

Fråga 6. Antag nu också att b är heltalig, och att $\overline{x}$ motsvarar en tillåten, men icke-optimal, baslösning till F. Hur förenklas fråga 5, och hur uppdateras flödet? Inom avdelningen för ledande frågor: känner Ni igen en gammal bekant?

Fråga 7. Diskutera hur svaren på frågorna 4–6 förändras då man ersätter den linjära funktionen $x \mapsto c^{\mathrm{T}}x$ med en mer generell, differentierbar, funktion $x \mapsto c(x)$. (Notera, för fråga 6, att en optimallösning nu inte säkert motsvarar en extremlösning i F, men att ett tillåtet flöde kan representeras på grundval av samma teknik som i det linjära fallet.)

Lycka till!