Pattes pysselhörna, del 3: Svar

Patte

February 1, 1996

Introduktion

I del tre av pysselhörnan studerar vi flöden i nätverk. Den välbekanta kopplingen mellan extrempunkter (tillåtna baslösningar) till den polyedriska mängd som beskriver tillåtna bågflöden och uppspännande träd kompletteras här med den mellan extremriktningar till flödespolyedern och cykliska flöden.

Vi upprepar först notationen. Vi låter A beteckna anslutningsmatrisen för en riktad graf $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, där $\mathcal{N}$ och $\mathcal{A}$ är nod- respektive bågmängderna; vektorn $b \in \Re^{|\mathcal{N}|}$ är vektorn av tillgång/efterfrågan av den aktuella varan (med en teckenkonvention kompatibel med den hos A), och vektorn u med $u_{ij} \in \Re_+ \cup \{+\infty\}$ är en icke-negativ (möjligen oändlig) kapacitet hos flödet i grafen. Genomgående antas att det existerar ett tillåtet flöde. Mängden av tillåtna bågflöden är

$$F = \{\, x \in \Re^{|\mathcal{A}|} \mid Ax = b; \quad x \leq u; \quad x \geq 0 \,\}.$$

Frågorna

Fråga 1. Givet $\overline{x} \in F$ är tangentkonen

$$T_F(\overline{x}) = \{\, y \in \Re^{|\mathcal{A}|} \mid Ay = 0; \quad y_{ij} \leq 0 \text{ om } x_{ij} = u_{ij}; \quad y_{ij} \geq 0 \text{ om } x_{ij} = 0 \,\}.$$

Motivering: utnyttja det generella resultatet för polyedrar

$$X = \{\, x \in \Re^n \mid a_i^{\mathrm{T}} x \leq b_i, \quad i \in \mathcal{I} \,\}$$

att

$$T_X(\overline{x}) = \{\, y \in \Re^n \mid a_i^{\mathrm{T}} y \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}(\overline{x}) \,\},$$

där

$$\mathcal{I}(\overline{x}) = \{\, i \in \mathcal{I} \mid a_i^{\mathrm{T}} \overline{x} = 0 \,\}.$$

Notera att villkoren $Ay = 0$ är desamma oavsett valet av $\overline{x}$ [mängden $\{\, y \in \Re^{|\mathcal{A}|} \mid Ay = 0 \,\}$ kallas *circulation space* i Rockafellar (1984)], och att de övriga anger den *målning* (med Sakis språkbruk) av grafen som definierar den välbekanta residualgrafen givet flödet $\overline{x}$.

Fråga 2. Vi rekapitulerar först representationssatsen: varje punkt x i X ovan kan representeras som summan av en konvexkombination av extrempunkterna till X och en linjärkombination av dess extremriktningar, dvs.

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j E_j + \sum_{i\in\mathcal{I}} \mu_i R_i &= x, \\
\sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda_j &= 1, \\
\lambda_j, \mu_i &\geq 0, \qquad \forall j, i.
\end{aligned}$$

Vi vet sedan tidigare att extrempunkterna till F motsvaras av en uppsättning bågar med flöden på sina undre eller övre gränser, och därutöver en uppsättning bågar som bildar ett uppspännande träd i grafen $\mathcal{G}$, med unikt bestämda flöden. Att extremriktningarna motsvarar flöden i cykler motiveras härnäst. (Samtidigt visas ett resultat, generellt kallat för *Carathéodorys Sats*, som anger hur många vägar och cykler som maximalt behövs för att beskriva ett godtyckligt flöde.)

Antag att $\overline{x} \in F$. Vi visar att $\overline{x}$ kan dekomponeras till flöden längs maximalt $|\mathcal{A}|$ riktade, enkla vägar och maximalt $|\mathcal{N}|$ riktade cykler. Vi börjar med att definiera dessa begrepp. Med en *riktad, enkel väg* r menas en uppsättning bågar $\{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_{k-1}, i_k)\}$, där ingen nod upprepas. En *riktad cykel* c är en riktad, enkel väg från en nod i_0 till en annan nod i_k följd av bågen (i_k, i_0).

Tag en nod i_0. Antag att den är en källa. Då finns en båge (i_0, i_1) med positivt flöde. Om nod i_1 är en sänka stoppar vi, annars ger balansvillkoren att det finns en båge (i_1, i_2) med positivt flöde. Fortsätt detta tills (1) en sänka påträffas eller (2) vi återvänder till en redan använd nod. (Detta inträffar inom $|\mathcal{A}|$ steg.) I fall (1) har vi funnit en riktad, enkel väg r från källan i_0 till en sänka i_k; i fall (2) har vi funnit en riktad cykel c. I båda fall består vägen eller cykeln av bågar med positiva flöden. I fall (1), låt vägflödet f_r vara minimum av käll- och sänkstyrkorna hos nod i_0 respektive i_k och flödet på bågarna i vägen, och omdefiniera dessa genom att minska källans styrka med f_r (minska b_{i_0}), minska sänkans styrka med f_r (öka b_{i_k}, med samma teckenkonvention), och minska varje bågflöde med f_r (vi reducerar därmed flödet i grafen motsvarande den funna vägen). På motsvarande sätt: i fall (2) sätter vi cykelflödet f_c lika med det minsta flödet på bågarna i cykeln, och omdefinerar dessa genom att minska flödet i cykeln med f_c. Detta upprepas tills obalanserna är noll i varje nod. Sedan upprepas förfarandet genom att välja en nod med en utgående båge med positivt flöde; denna gång kommer vi med nödvändighet att finna en riktad cykel. Vi stoppar då flödet är noll i varje båge.

Flödet $\overline{x}$ är naturligtvis summan av alla flöden f_r och f_c längs alla funna riktade, enkla vägar och cykler. Dessutom, varje gång vi påträffar en väg minskar en nods obalans eller en båges flöde till noll, och varje gång vi påträffar en cykel minskar vi flödet längs en båge till noll. På detta sätt har vi alltså visat att ett godtyckligt icke-negativt flöde kan representeras av ett flöde på högst $|\mathcal{A}| + |\mathcal{N}|$ riktade, enkla vägar och cykler, varav högst $|\mathcal{N}|$ är riktade cykler.

Förfarandet ovan visar också att varje element i tangetkonen kan representeras med högst $|\mathcal{N}|$ cykler (riktningen på bågarna bestäms då av målningen av grafen). Det visar alltså att man kan flytta från ett tillåtet flöde till varje annat tillåtet flöde genom att skicka flöden i högst $|\mathcal{N}|$ cykler; detta är fundamentet till nätverksalgoritmer.

Algoritmen ovan är hämtad ur Ahuja *et al.* (1993, Sats 3.5); en liknande metod som bygger på identifiering av extremala flöden (tillåtna baslösningar) och cykler (extremalriktningar) finns i Rockafellar (1984, Sektion 4J).

Fråga 3. För en godtycklig matris A är

$$\begin{aligned} C(A) &= \{ b \in \Re^m \mid \exists x \text{ such that } Ax = b \} \\ N(A) &= \{ y \in \Re^n \mid Ay = 0 \} \end{aligned}$$

kolumnrummet respektive nollrummet av A. Dimensionen hos dessa underrum är $\texttt{dim}\ A$ respektive $n - \texttt{dim}\ A$. I nätverkssammanhang (underförstått att $\mathcal{G}$ är sammanhängande) får vi att $\texttt{dim}\ C(A) = |\mathcal{N}| - 1$, och alltså $\texttt{dim}\ N(A) = |\mathcal{A}| - |\mathcal{N}| + 1$.

Vi vet att kolumner i A motsvarande bågarna i ett uppspännande träd bildar en bas för $C(A)$. Karakteriseringen i fråga 2, som visar att ett element i tangentkonen [dvs. ett element i $N(A)$] kan skrivas som en icke-negativ linjärkombination av flöden i cykler, visar att kolumner i A motsvarande en cykel bildar en bas för $N(A)$. Ett enkelt exempel illustrerar resultatet.

Antag att vi har en graf $\mathcal{G}$ med fyra noder och fem bågar

$$\{(1,2),(2,3),(1,3),(1,4),(4,3)\}.$$

Gauss-elimination av A ger:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi söker en bas för $N(A)$, som enligt ovan har dimension två. Vi låter x_1, x_2, x_5 vara beroende variabler, och alltså x_3, x_4 fria variabler. Systemet $Ax = 0$ ger, med $x_3 = 1, x_4 = 0$, att $x^{\mathrm{T}} = (-1, -1, 1, 0, 0)$, medan valet $x_3 = 0, x_4 = 1$ ger $x^{\mathrm{T}} = (-1, -1, 0, 1, 1)$. Grafiskt är dessa enhetsflöden i två cykler som spänner upp $N(A)$.

Representationen av ett bågflöde med vägar (eller uppspännande träd) och cykler har alltså sin algebraiska motsvarighet i baser för kolumn- respektive nollrummet till anslutningsmatrisen.

Fråga 4. Antag att flödet i grafen $\mathcal{G}$ är associerat med en linjär kostnadsfunktion $x \mapsto c^{\mathrm{T}} x$, där $c \in \Re^{|\mathcal{A}|}$ är en konstant vektor. Ange optimalitetsvillkoren för problemet att minimera denna funktion över F.

Fråga 5. Föreslå ett (enkelt) subproblem för att hitta en förbättrande riktning (tillåten descentriktning) från ett icke-optimalt, tillåtet flöde, genom att utnyttja ovanstående. Beskriv hur det kan lösas, och hur det detekterar optimalitet i förekommande fall.

Fråga 6. Antag nu också att b är heltalig, och att $\overline{x}$ motsvarar en tillåten, men icke-optimal, baslösning till F. Hur förenklas fråga 5, och hur uppdateras flödet? Inom avdelningen för ledande frågor: känner Ni igen en gammal bekant?

Fråga 7. Diskutera hur svaren på frågorna 4–6 förändras då man ersätter den linjära funktionen $x \mapsto c^{\mathrm{T}} x$ med en mer generell, differentierbar, funktion $x \mapsto c(x)$. (Notera, för fråga 6, att en optimallösning nu inte säkert motsvarar en extremlösning i F, men att ett tillåtet flöde kan representeras på grundval av samma teknik som i det linjära fallet.)

Lycka till!