# The new Pattes pysselhörna, del I

Patte

January 8, 1996

## Introduktion

Hej igen, och välkomna till en ny omgång med kul pyssel som lyser upp i höstmörkret. Jag beklagar att jag under den första omgången lät pysslet skena iväg med mig (hur nu det går till...), och skapade alltför omfattande uppgifter. Denna gång skall jag hålla band på mig, det lovar jag. Jag satsar på att ge Er uppgifter som är starkt relaterade till den undervisning vi bedriver, och som förhoppningsvis ger en ny blid av kursstoffet. Vem vet, några av uppgifterna här kanske kan införas i undervisningen? (Drömma får man väl?)

Formerna för delgivande av lösningssförslag vill jag ha Era synpunkter på; vill Ni diskutera dem direkt eller skriva ned dem och lämna in för att få kommentarer? Vill Ni att jag efter ett par veckor ger ett kort fikarumsseminarium där jag delger Er mina lösningsförslag? Fritt fram att komma med synpunkter!

Förra omgången var det knappt med lösningsförslag från Er (och jag har ännu inte delgivit mitt lösningsförslag på Pyssel 3). *Ann-Brith* var den mest aktive, och får därmed flitpriset (ett symboliskt pris). Denna omgångs pris har ännu ej bestämts, men jag funderar på att skapa ett vandringspris, under förutsättning att deltagandet är stort nog.

## Frågor

I del I handlar det om grunderna för Frank–Wolfe-algoritmen, som vi alla älskar att hata, och utvidgningar av dessa till icke-differentierbar optimering.

Uppgifterna är ordnade både i logisk följd och i stigande svårighetsgrad.

**Fråga 1.** Betrakta problemet

[P]

$$\min_{x \in X} f(x),$$

där $f : \Re^n \mapsto \Re$ är en konvex och differentierbar funktion på $\Re^n$, och $X$ är en icke-tom, sluten och konvex mängd i $\Re^n$. (Observera att det inte finns den minsta anledning att begränsa sig till polyedriska mängder. Det är en vanföreställning att Frank–Wolfe-algoritmen kräver detta!) Antag att problem [P] har en optimallösning, och låt $X^*$ vara mängden av dessa.

Visa att

$$x^* \in X^* \Longleftrightarrow x^* \in \arg\min_{y \in X} \nabla f(x^*)^{\mathrm{T}}(y - x^*),$$

dvs. $x^*$ löser [P] om och endast om $x^*$ är en av lösningarna till Frank–Wolfes subproblem definierat i $x^*$. Relatera detta till det välkända stoppkriteriet.

**Fråga 2.** Låt nu $f$ vara icke-differentierbar, men i övrigt ha samma egenskaper som ovan. Hur ser motsvarande ekvivalens-resultat ut? Rita och berätta om konsekvenser av icke-differentierbarheten för Frank–Wolfe-algoritmen; finns det någon vettig utvidgning av den till det icke-differentierbara fallet?

**Fråga 3.** Ekvivalensresultatet i 1. är en karakterisering av optimallösningarna till konvexa, differentierbara optimeringsproblem; visa att i fallet då $X$ är polyedrisk den högra utsagan kan ges en tolkning i KKT-termer.

Lycka till!