The new Pattes pysselhörna, del III

Patte

February 8, 1996

Introduktion

Denna gång studerar vi två formuleringar av ett heltalsproblem; de två formuleringarna har, trots ekvivalensen, olika egenskaper vid relaxation, och uppträder alltså olika vid användandet av traditionella lösningsansatser. Uppgiften illustrerar vikten av att välja rätt formulering av ett problem för att få bästa möjliga relaxation.

Frågor

I en fabrik skall n jobb utföras; för detta ändamål finns en maskinpark med m maskiner. Varje jobb kan utföras i vilken av helst av maskinerna, men tar olika lång tid och kostar olika mycket i materialåtgång beroende på val av maskin; om maskin i ($i = 1, \ldots, m$) används för jobb j ($j = 1, \ldots, n$) tar arbetet a_{ij} timmar och kostar c_{ij} kronor. Av säkerhetsskäl kan inte maskin i användas mer än b_i timmar innan en inspektion måste göras. (Alla konstanter är positiva heltal.)

Det *generaliserade tillordningsproblemet* är:

[GAP^1]

$$
\begin{array}{rllll}
f^* = & \min & f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} & & \\
& \text{då} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \;\leq\; b_i, & i = 1, \ldots, m, & \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \;=\; 1, & & j = 1, \ldots, n, \\
& & x_{ij} \;\in\; \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, m, & j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Fråga 1.

Tre relaxationer av [GAP^1] betraktas:

(a) LP-relaxation;

(b) Lagrange-relaxation av tillordningsvillkoren;

(c) Lagrange-relaxation av kappsäcksvillkoren.

De tre relaxationerna ger optimala värden som underskattar f^*; vilka relationer gäller mellan dem?

Fråga 2.

Vi betraktar version **(b)** av relaxationerna ovan, och låter x_i^p, $p = 1, \ldots, P_i$, vara de vektorer i $\{0,1\}^n$ som uppfyller kappsäcksvillkor i, $i = 1, \ldots, m$. Med hjälp av dessa, formulera det Lagrangeduala problemet som ett *explicit* maximeringsproblem. (Utnyttja att Lagrangesubproblemet separerar i m problem över maskinerna.)

Fråga 3.

Betrakta maskin i (riktigt fin, eller hur?). Låt K_i vara antalet kombinationer av jobb som maskin i kan utföra. De K_i kombinationerna kan beskrivas med hjälp av följande matris:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{om jobb } j \text{ ingår i kombination } k \text{ för maskin } i, \\ 0, & \text{annars,} \end{cases}$$

där $k = 1, \ldots, K_i$, $i = 1, \ldots, m$, och $j = 1, \ldots, n$. Med hjälp av denna matris, formulera ett problem ekvivalent med [GAP^1]. (Detta nya problem kallas i fortsättningen [GAP^2].)

Fråga 4.

Jämför styrkan hos relaxationen **(b)** ovan med LP-relaxationen av [GAP^2].

Ledning: betrakta LP-dualen till det explicita Lagrangeduala problemet i fråga 2.

Fråga 5.

Vilka slutsatser kan dras av detta när det gäller styrkan hos de två formuleringarna [GAP^1] och [GAP^2]?

Fråga 6.

En nackdel med formuleringen [GAP^2] är att den kräver en enumeration av samtliga tillåtna kombinationer av jobb för en maskin, och K_i kan vara mycket stort. En sådan modell löses lämpligen med kolumngenerering, dvs. man genererar kombinationer ur δ algoritmiskt. Fundera på algoritmiska relationer mellan kolumngenerering på [GAP^2] och relaxationsansatsen för [GAP^1] beskriven i fråga 2.

Avslutning.

Jag är borta under vecka 7, och mötet förläggs därför lämpligen till vecka 8 (eller 9, om så önskas).

Lycka till!