BERÄKNINGSMATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer
Telefon: Niclas Andréasson, 0740-459022
2004–01–15 kl. 8.45-12.45

TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u'' = 3, \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

(b) Dela in $[0,1]$ i tre delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$ och $x_3 = 1$. Beräkna för hand den styckvis linjära interpolanten U på denna partition.

2. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$-(au')' = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Visa följande a posteriori feluppskattning

$$||(u - U)'||_a \leq C||h\mathcal{R}(U)||_{a^{-1}},$$

där U är finita element lösningen och $\mathcal{R}(U) = (aU')' + f$ är residualen.

3. Dela in kvadraten $[0,1] \times [0,1]$ i 2 likformiga triangular. Placera sedan en linjär basfunktion $\varphi(x)$ i vart och ett av kvadratens hörn. Beräkna sedan massmatrisen med element $m_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = 1, \ldots, 4$ på denna triangulering.

4. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplcetransform

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2\theta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \qquad t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = x. & \end{cases}$$

6. Betrakta Dirichlets problem för Poissonekvationen, $-\Delta u = f$, i Ω, $u = 0$, på $\partial\Omega$, där Ω är ett polygonområde i $\mathbb{R}^2$. Visa stabilitetsuppskattningen

$$\|\nabla u\| \leq C_\Omega \|f\|.$$

7. Visa, att $L[f * g](s) = F(s)G(s)$ då

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

och där $f(t) = g(t) = 0$ för $t < 0$.

MA