Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer

BERÄKNINGSMATEMATIK Telefon: K. Kraft, F. Bengzon: 0739-779268/0762-186654

Chalmers tekniska högskola 2004–08–25 kl. 8.45-12.45

TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Antag att $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ är Lipschitz kontinuerlig. Bestäm den linjära interplonten $\pi f \in \mathcal{P}(0,1)$, då

   (a) $f(x) = x^n$, (b) $f(x) = \cos(n\pi x)$,

   där n är positiv heltal.

2. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplcetransform

$$y'(t) + 2y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 3, \quad y(0) = 2.$$

3. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u'' = x, \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

   (b) Dela in intervallet i 3 lika delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ och $x_3 = 1$. Beräkna för hand den styckvis linjära finita element lösningen U på denna partition.

4. Funktionen $f(x)$ har perioden 4 och $f(x) = |x|^3$ för $|x| \leq 2$. Bestäm Fourierserien för $f(x)$ och $f'(x)$.

5. Antag f är 2π-periodisk kontinuerlig, f' är styckvis kontinuerlig. Visa att om a_n, b_n, C_n är $\mathcal{F}$-koeff. för f, och a'_n, b'_n och C'_n $\mathcal{F}$-koeff. för f'. Då är

$$a'_n = nb_n, \qquad b'_n = -na_n, \qquad C'_n = inC_n.$$

6. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \qquad (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & \qquad\qquad (RV). \end{cases}$$

   Verifiera att finitelement lösningen: $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (PDE)+(RV) i energinormen: Dvs visa att

$$||(u-U)'||_a \leq ||(u-v)'||_a \quad \forall v \in V_h^0, \qquad ||w||_a = \Big(\int_0^1 aw^2\,dx\Big)^{1/2},$$

   med $V_h^0 := \{$styckvis linjära kontinuerliga v med $v(0) = v(1) = 0\}$.

7. Bevisa Green's formel: Dvs visa att om $u \in C^2(\Omega)$ och $v \in C^1(\Omega)$, så

$$\int_\Omega (\Delta u)\,v\,dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)\,v\,ds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx,$$

   där n är utåtriktade enhetsnormalen på $\partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

MA