Lösningar TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng, 04-01-15

1. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u'' = 3, \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

(b) Dela in $[0,1]$ i tre delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$ och $x_3 = 1$. Beräkna för hand den styckvis linjära interpolanten U på denna partition.

Lösning: (a) Vi har att

$$\begin{aligned}
&-u''(x) = 3 \Longrightarrow u'(x) = -3x + A \Longrightarrow u(x) = -\tfrac{3}{2}x^2 + Ax + B. \\
&u(0) = 1 \Longrightarrow B = 1, \quad u(1) = 0 \Longrightarrow -\tfrac{3}{2} + A + 1 = 0 \Longrightarrow A = \tfrac{1}{2}, \\
&\Longrightarrow \underline{u(x) = -\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1.}
\end{aligned}$$

(b) Med dem randdata (obs! inhomogen i $x = 0$) och partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 1$, har vi följande 3 basfunktioner:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - 6x, & 0 \le x \le 1/6, \\ 0, & 1/6 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 6x, & 0 \le x \le 1/6, \\ -3x + 3/2, & 1/6 \le x \le 1/2 \\ 0, & 1/2 \le x \le 1, \end{cases}$$

och

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/6, \\ 3x - 1/2, & 1/6 \le x \le 1/2 \\ -2x + 2, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

För styckvis linjära finit element lösningen och med

$$\begin{aligned}
U_0 &= u(x_0) = 1, \\
U_1 &= u(x_1) = -3/2 \times 1/36 + 1/2 \times 1/6 + 1 = 25/24, \\
U_2 &= u(x_2) = -3/2 \times 1/4 + 1/2 \times 1/2 + 1 = 7/8
\end{aligned}$$

gäller

$$U(x) = U_0\varphi_0(x) + U_1\varphi_1(x) + U_2\varphi_2(x) = \varphi_0(x) + \frac{25}{24}\varphi_1(x) + \frac{7}{8}\varphi_2(x).$$

Insättningen av $\varphi_i, \ i = 0, 1, 2$ ger

$$U(x) = \begin{cases} 1 - 6x + 25/24(6x) = 1 + x/4, & 0 \le x \le 1/6, \\ 0 + 25/24(-3x + 3/2) + 7/8(3x - 1/2) = -x/2 + 9/8, & 1/6 \le x \le 1/2, \\ 0 + 0 + 7/8(-2x + 2) = -7x/4 + 7/4, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

2. Betrakta den partiella differentialekvationen

$$-(au')' = f, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Visa följande a posteriori feluppskattning

$$||(u - U)'||_a \le C||h\mathcal{R}(U)||_{a^{-1}},$$

där U är finita element lösningen och $\mathcal{R}(U) = (aU')' + f$ är residualen.

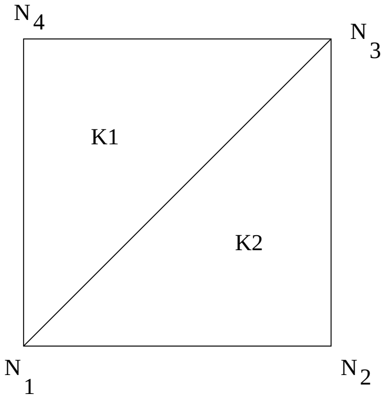
Lösning: See Chapter 8, Theorem 8.2, or Lecture Notes.

3. Dela in kvadraten $[0,1]\times[0,1]$ i 2 likformiga triangular. Placera sedan en linjär basfunktion $\varphi(x)$ i vart och ett av kvadratens hörn. Beräkna sedan massmatrisen med element $m_{ij}=(\varphi_i,\varphi_j)$, $i,j=1,\dots,4$ på denna triangulering.

Lösning: Vi har dem linjära basfunktionerna

$$\varphi_i(N_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

där noderna $N_j j=1,2,3,4$ är ginva enligt figuren nedan:



Man kan räkna ut dem 4 basfunktionernas restriktioner på K_1 och K_2 med ansattz: $\varphi_i|_{K_j}=ax+by+c$, $j=1,2$. Då får vi att:

$$\varphi_1|_{K_1}=1-y,\quad \varphi_2|_{K_1}=0,\quad \varphi_3|_{K_1}=x,\quad \varphi_4|_{K_1}=y-x,$$
$$\varphi_1|_{K_2}=1-x,\quad \varphi_2|_{K_2}=x-y,\quad \varphi_3|_{K_2}=y,\quad \varphi_4|_{K_2}=0.$$

Vi har då

$$\begin{aligned}m_{11}&=(\varphi_1,\varphi_1)_\Omega=(\varphi_1,\varphi_1)_{K_1}+(\varphi_1,\varphi_1)_{K_2}\\&=\int_0^1\int_x^1(1-y)^2\,dy\,dx+\int_0^1\int_y^1(1-x)^2\,dx\,dy=1/12+1/12=1/6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{12}=m_{21}&=(\varphi_1,\varphi_2)_\Omega=(\varphi_1,\varphi_2)_{K_1}+(\varphi_1,\varphi_2)_{K_2}\\&=0+\int_0^1\int_0^x(1-x)(x-y)\,dy\,dx=0+\int_0^1\int_0^x(x-y-x^2+xy)\,dy\,dx\\&=\int_0^1\Big[xy-y^2/2-x^2y+xy^2/2\Big]_0^x=\int_0^1 x^2/2-x^3/2\,dx=1/6-1/8=1/24.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_{13}=m_{31}&=(\varphi_1,\varphi_3)_\Omega=(\varphi_1,\varphi_3)_{K_1}+(\varphi_1,\varphi_3)_{K_2}\\&=\int_0^1\int_x^1(1-y)x\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^x y(1-x)\,dy\,dx\\&=\int_0^1\int_x^1(x-xy)\,dy\,dx+\int_0^1\int_0^x(y-xy)\,dy\,dx\\&=\int_0^1\Big[xy-xy^2/2\Big]_x^1\,dx+\int_0^1\Big[y^2/2-xy^2/2\Big]_0^x\,dx\\&=\int_0^1(x-x/2-x^2+x^3/2)\,dx+\int_0^1(x^2/2-x^3/2)\,dx=\int_0^1(x/2-x^2/2)\,dx\\&=\Big[x^2/4-x^3/6\Big]_0^1=1/4-1/6=1/12.\end{aligned}$$

På samma sätt som i m_{12} har vi att

$$m_{14} = m_{41} = 1/24.$$

Vidare är

$$\begin{aligned} m_{22} &= (\varphi_2, \varphi_2)_\Omega = (\varphi_2, \varphi_2)_{K_1} + (\varphi_2, \varphi_2)_{K_2} = 0 + \int_0^1 \int_0^x (x-y)^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \Big[-(x-y)^3/3 \Big]_0^x dx = \int_0^1 x^3/3 \, dx = \Big[x^4/12 \Big]_0^1 = 1/12, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} m_{23} = m_{32} &= (\varphi_2, \varphi_3)_\Omega = (\varphi_2, \varphi_3)_{K_1} + (\varphi_2, \varphi_3)_{K_2} = 0 + \int_0^1 \int_0^x (x-y)y \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (xy - y^2) \, dy \, dx = \int_0^1 \Big[xy^2/2 - y^3/3 \Big]_0^x dx \\ &= \int_0^1 (x^3/2 - x^3/3) \, dx = \int_0^1 x^3/6 \, dx = \Big[x^4/24 \Big]_0^1 = 1/24. \end{aligned}$$

Observera att

$$m_{24} = m_{42} = 0.$$

$$\begin{aligned} m_{33} &= (\varphi_3, \varphi_3)_\Omega = (\varphi_3, \varphi_3)_{K_1} + (\varphi_3, \varphi_3)_{K_2} = \int_0^1 \int_x^1 x^2 \, dy \, dx + \int_0^1 \int_0^x y^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \Big[x^2 y \Big]_x^1 dx + \int_0^1 \Big[y^3/3 \Big]_0^x dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx + \int_0^1 x^3/3 \, dx = 1/12 + 1/12 = 1/6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{34} = m_{43} &= (\varphi_3, \varphi_4)_\Omega = (\varphi_3, \varphi_4)_{K_1} + (\varphi_3, \varphi_4)_{K_2} = \int_0^1 \int_x^1 x(y-x) \, dy \, dx + 0 \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (xy - x^2) \, dy \, dx = \int_0^1 \Big[xy^2/2 - x^2 y \Big]_x^1 dx = \int_0^1 (x/2 - x^2 - x^3/2 + x^3) \, dx \\ &= \int_0^1 (x/2 - x^2 + 2x^3/3) \, dx = \Big[x^2/4 - x^3/3 + 2x^4/12 \Big]_0^1 = 1/4 - 1/3 + 1/6 = 1/12. \end{aligned}$$

Slutligem

$$\begin{aligned} m_{44} &= (\varphi_4, \varphi_4)_\Omega = (\varphi_4, \varphi_4)_{K_1} + (\varphi_4, \varphi_4)_{K_2} = \int_0^1 \int_x^1 (y-x)^2 \, dy \, dx + 0 \\ &= \int_0^1 \Big[(y-x)^3/3 \Big]_x^1 dx = \int_0^1 (1-x)^3/3 \, dx = \Big[-(1-x)^4/12 \Big]_0^1 = 1/12. \end{aligned}$$

Alltså är massmatrisen

$$M = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplcetransform

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2\theta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Lösning: Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2sY(s) - 2y(0) + 2Y(s) = 2/s \iff \\
&s^2Y(s) + 2sY(s) + 2Y(s) = 2/s \iff \\
&Y(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} = [PBU] = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2} \\
&\quad = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

Invers transformering ger att

$$y(t) = \theta(t) - e^{-t}\theta(t)(\cos t + \sin t).$$

5. Lös värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, \qquad t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = x. & \end{cases}$$

Lösning: Insättning av variabelseparationen $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ i differentialekvationen ger att (se Lecture Notes in Fourier analys: Variabelseparation; Exempel 1 med $L = 1$ och $f(x) = x$)

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda < 0.$$

För X får vi

$$X(x) = A\sin\sqrt{-\lambda}x + B\cos\sqrt{-\lambda}x,$$

med randdata: $X(0) = 0$ får vi $B = 0$. Detta innebär att $X(x) = A\sin\sqrt{-\lambda}x$ vilket med $X'(0) = 0$ ger att $\cos\sqrt{-\lambda} = 0$ dvs. $\lambda = -[(n+1/2)\pi]^2 < 0,\ n = 0.1, 2, \ldots$ och

$$X(x) = X_n(x) = \sin(n+1/2)\pi x.$$

Ekvationen för T blir då

$$T'(t) = -[(n+1/2)\pi]^2 T_n(t),$$

med allmänna lösningen

$$T(t) = T_n(t) = C_n e^{-[(n+1/2)\pi]^2 t}, \ n = 0.1, 2, \ldots.$$

Superposition ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-[(n+1/2)\pi]^2 t} \sin(n+1/2)\pi x.$$

Med initial data kräver vi att

$$u(x,0) = x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(n+1/2)\pi x.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned} C_n &= 2\int_0^1 x\sin(n+1/2)\pi x\,dx = [PI] \\ &= 2\Big[x\frac{-\cos(n+1/2)\pi x}{(n+1/2)\pi}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(n+1/2)\pi x}{(n+1/2)\pi}\,dx \\ &= 2\Big[\frac{\sin(n+1/2)\pi x}{[(n+1/2)\pi]^2}\Big]_0^1 = 2\frac{\sin(n+1/2)\pi}{[(n+1/2)\pi]^2} = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \end{aligned}$$

Alltså endast udda n ger koefficienter som är skilda från noll, och vi får lösningen:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-[(n+1/2)\pi]^2 t}\sin(n+1/2)\pi x.$$

6. Betrakta Dirichlets problem för Poissonekvationen, $-\Delta u = f$, i Ω, $u = 0$, på $\partial\Omega$, där Ω är ett polygonområde i $\mathbb{R}^2$. Visa stabilitetsuppskattningen

$$\|\nabla u\| \le C_\Omega \|f\|.$$

Lösning: Se boken eller PDE Lecture Notes Chapter 15.

7. Visa, att $L[f*g](s) = F(s)G(s)$ då

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau,$$

och där $f(t) = g(t) = 0$ för $t < 0$.

Lösning: See Lecture Notes in Fourier Analys; Fourierserier.

MA