Lösningar TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng, 04-08-25

1. Antag att $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ är Lipschitz kontinuerlig. Bestäm den linjära interplonten $\pi f\in\mathcal{P}(0,1)$, då
(a) $f(x)=x^n$, (b) $f(x)=\cos(n\pi x)$,
där n är positiv heltal.

Lösning: Den linjär interpolanten $\pi f\in\mathcal{P}(x_0,x_1)$ kan skrivas som

$$\pi f(x)=f(x_0)\varphi_0(x)+=f(x_1)\varphi_1(x),$$

där $\varphi_i(x)$ är en bas för $\mathcal{P}(x_0,x_1)$ av linj|'ara polynom på$I=[x_0,x_1]$. Här har vi $x_0=0$ och $x_1=1$,

$$\varphi_0(x)=1-x,\qquad \varphi_1(x)=x.$$

(a) Därför linjära interpolanten av $f(x)=x^n$ på I kan skrivas som:

$$\begin{aligned}\pi f(x)&=\sum_{i=1}^{2}f(x_i)\varphi(x_i)=f(0)\varphi_0(x)+f(1)\varphi_1(x)\\&=0\cdot(1-x)+1\cdot x=x.\end{aligned}\tag{1}$$

Observera att resultat är oberoende av n (värför?).

(b) Med $f(x)=\cos(n\pi x)$, får vi (analogt) att

$$\begin{aligned}\pi f(x)&=\sum_{i=1}^{2}f(x_i)\varphi(x_i)=f(0)\varphi_0(x)+f(1)\varphi_1(x)\\&=\cos(0)\cdot(1-x)+\cos(n\pi)\cdot x=\\&=\begin{cases}1-x+x=1 & \text{om } n \text{ jänm då} \quad \cos(n\pi)=+11\\ 1-x-x=1-2x & \text{om } n \text{ udda då} \quad \cos(n\pi)=-1\end{cases}\end{aligned}\tag{2}$$

Här har vi fått en n-beroende resultat.

2. Lös följande differentialekvation för $t\geq 0$ med hjälp av Laplcetransform

$$y'(t)+2y(t)+5\int_0^t y(\tau)\,d\tau=3,\quad y(0)=2.$$

Lösning:

$$y(t)\supset Y(s),\qquad y'(t)\supset sY(s)-y(0)=sY(s)-2,\qquad \int_0^t y(\tau)\,d\tau\supset\frac{Y(s)}{s}.$$

Varför Laplacetransform ger

$$sY(s)-2+2Y(s)+\frac{5}{s}Y(s)=\frac{3}{s}\Longrightarrow(s^2+2s+5)Y(s)=2s+3.$$

Alltså

$$Y(s)=\frac{2s+3}{(s+1)^2+4}=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4}+\frac{1}{(s+1)^2+4}.$$

Inverstransform ger

$$y(t)=e^{-t}\Big(2\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big).$$

3. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u'' = x, \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

(b) Dela in intervallet i 3 lika delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ och $x_3 = 1$. Beräkna för hand den styckvis linjära finita element lösningen U på denna partition.

Lösning: (a) Vi har att

$$\begin{aligned}
&-u''(x) = x \Longrightarrow u'(x) = -x^2/2 + A \Longrightarrow u(x) = -\tfrac{1}{6}x^3 + Ax + B.\\
&u(0) = 1 \Longrightarrow B = 1, \quad u(1) = 0 \Longrightarrow -\tfrac{1}{6} + A + 1 = 0 \Longrightarrow A = -\tfrac{5}{6},\\
&\Longrightarrow \underline{u(x) = -\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{5}{6}x + 1}.
\end{aligned}$$

(b) Med dem randdata (obs! inhomogen i $x = 0$) och partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$, har vi följande 3 basfunktioner:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & 0 \le x \le 1/3, \\ 0, & 1/3 \le x \le 1, \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1/3, \\ -3x + 2, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 0, & 2/3 \le x \le 1, \end{cases}$$

och

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/3, \\ 3x - 1, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ -3x + 3, & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

För styckvis linjära finit element lösningen och med

$$\begin{aligned}
U_0 &= u(x_0) = 1,\\
U_1 &= u(x_1) = -1/6 \times 1/27 - 5/6 \times 1/3 + 1 = 58/81,\\
U_2 &= u(x_2) = -1/6 \times 8/27 - 5/6 \times 2/3 + 1 = 32/81
\end{aligned}$$

gäller

$$U(x) = U_0\varphi_0(x) + U_1\varphi_1(x) + U_2\varphi_2(x) = \varphi_0(x) + \frac{58}{81}\varphi_1(x) + \frac{32}{81}\varphi_2(x).$$

Insättningen av $\varphi_i,\ i = 0, 1, 2$ ger

$$U(x) = \begin{cases} 1 - 3x + 58/81(3x) = 1 - \frac{23}{27}x, & 0 \le x \le 1/3, \\ 0 + 58/81(-3x + 2) + 32/81(3x - 1) = -\frac{26}{27}x + \frac{84}{81}, & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 0 + 0 + 32/81(-3x + 3) = \frac{32}{27}(-x + 1), & 2/3 < x < 1. \end{cases}$$

4. Funktionen $f(x)$ har perioden 4 och $f(x) = |x|^3$ för $|x| \le 2$. Bestäm Fourierserien för $f(x)$ och $f'(x)$.

Lösning: Observera att $f(x) = |x|^3$ är jämn, därför f:s Fourierserie är cosinusserie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/2), \quad (\Omega = 2\pi/T = 2\pi/4 = \pi/2, \text{ perioden } T = 4).$$

$$a_0 = 2\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx = 2\cdot\frac{2}{4}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{2^4}{4} = 4.$$

För $n \ge 1$ gäller

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\cos(n\pi x/2)\,dx \\
&= \int_0^2 x^3 \cos(n\pi x/2)\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left\{\Big[x^3 \sin\frac{n\pi}{2}x\Big]_0^2 - 3\int_0^2 x^2 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx\right\} \\
&= \frac{12}{\pi^2 n^2}\left\{\Big[x^2 \cos\frac{n\pi}{2}x\Big]_0^2 - 2\int_0^2 x\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx\right\} \\
&= \frac{12}{\pi^2 n^2}\left\{4(-1)^n - 2\Big[x\frac{\sin n\pi x/2}{n\pi/2} + \frac{\cos n\pi x/2}{n^2\pi^2/4}\Big]_0^2\right\} \\
&= \frac{12}{\pi^2 n^2}\left\{4(-1)^n - \frac{8}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\right\} = \frac{48}{n^4\pi^4}\left\{2 + (-1)^n(n^2\pi^2 - 2)\right\}.
\end{aligned}$$

Alltså

$$f(x) = 2 + \frac{48}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2 + (-1)^n(n^2\pi^2 - 2)}{n^4}\cos(n\pi x/2).$$

Termvis derivering är tillåtet (värför?), och vi får

$$f'(x) = -\frac{24}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2 + (-1)^n(n^2\pi^2 - 2)}{n^3}\sin(n\pi x/2).$$

5. Antag f är 2π-periodisk kontinuerlig, f' är styckvis kontinuerlig. Visa att om $a_n,\ b_n,\ C_n$ är $\mathcal{F}$-koeff. för f, och $a'_n,\ b'_n$ och C'_n $\mathcal{F}$-koeff. för f'. Då är

$$a'_n = nb_n, \qquad b'_n = -na_n, \qquad C'_n = inC_n.$$

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

6. Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} -\Big(a(x)u'(x)\Big)' = f, & 0 < x < 1, \qquad (PDE) \\ u(0) = u(1) = 0, & \qquad\qquad\quad (RV). \end{cases}$$

Verifiera att finitelement lösningen: $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (PDE)+(RV) i energinormen: Dvs visa att

$$||(u-U)'||_a \le ||(u-v)'||_a \quad \forall v \in V_h^0, \qquad ||w||_a = \Big(\int_0^1 aw^2\,dx\Big)^{1/2},$$

med $V_h^0 := \{$styckvis linjära kontinuerliga v med $\ v(0) = v(1) = 0\}$.

Lösning: Se boken eller PDE Lecture Notes Chapter 8.

7. Bevisa Green's formel: Dvs visa att om $u \in C^2(\Omega)$ och $v \in C^1(\Omega)$, så

$$\int_\Omega (\Delta u)\, v\, dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)\, v\, ds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx,$$

där n är utåtriktade enhetsnormalen på $\partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Lösning: Se boken eller PDE Lecture Notes Chapter 14.

MA