Lösningar TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng, 05-01-13

1. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplacetransform

$$y''(t) + y(t) = \cos(t), \qquad y(0) = y'(0) = 1.$$

Lösning: Laplacetransformering ger

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \qquad \Longleftrightarrow\\
&(s^2+1)Y(s) - s - 1 = \frac{s}{s^2+1} \qquad \Longleftrightarrow\\
&(s^2+1)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + s + 1 \qquad \Longleftrightarrow\\
&Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{s+1}{s^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Från tabellen har vi att

$$L[tf(t)](s) = -F'(s), \qquad \text{och} \qquad L[\sin(bt)](s) = \frac{b}{s^2+b^2},$$

värför är

$$-\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = L[t\sin(t)],$$

och lösningen är, genom invers Laplacetransformation

$$\text{Svar} \qquad y(t) = \frac{1}{2}t\sin(t) + \sin(t) + \cos(t) = (1+\frac{t}{2})\sin(t) + \cos(t).$$

2. Bestäm approximationsfelet

$$e = \int_0^1 \Big(\Pi_1 f(x) - f(x)\Big)\,dx,$$

då $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, och $\Pi_1 f(x)$ är dess styckvis linjära interpolant i partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, och $x_2 = 1$.

Lösning: Vi har att

$$\Pi_1 f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 1/2\\ \frac{1}{2}(3x-1), & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
\Pi_1 f(x) &= \int_0^{1/2} \frac{1}{2}x\,dx + \int_0^{1/2}\frac{1}{2}(3x-1)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{1/2} + \frac{1}{2}\Big[\frac{(3x-1)^3}{6}\Big]_{1/2}^1 \qquad (1)\\
&= \frac{1}{16} + \frac{5}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Eftersom

$$\int_0^1 x^2\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}, \qquad (2)$$

då får vi genom subtractionen (1)-(2) att

$$\text{Svar} \qquad e = \int_0^1 \Big(\Pi_1 f(x) - f(x)\Big)\,dx = \frac{3}{8} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

3. Funktionen $f(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ är periodisk med perioden 1.
(a) Utveckla f i Fourierserier.
(b) Bestäm seriens summa för $x = 0$ och $x = 1$.

Lösning: a) Vi har att perioden $2L = 1$. Fourierkoefficienterna är då

$$a_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} x\cos\frac{k\pi x}{L}\,dx = 2\int_0^1 x\cos(2k\pi x)\,dx,$$
$$b_k = \frac{1}{L}\int_0^{2L} x\sin\frac{k\pi x}{L}\,dx = 2\int_0^1 x\sin(2k\pi x)\,dx.$$

Med hjälp av partial integration får vi att

$$a_0 = 1, \qquad a_k = 0, \quad k \neq 0, \qquad b_k = -\frac{1}{k\pi}.$$

Därför kan vi skriva

$$f(x) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k}.$$

b) Både $x = 0$ och $x = 1$ är diskontinuitetspukter och därför är, see figuren,

$$S(0) = \frac{1}{2}[f(0^+) + f(0-)] = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$
$$S(1) = \frac{1}{2}[f(1^+) + f(1-)] = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}.$$

4. (a) Formulera den styckvis linjära, kontinuerliga finitelementproceduren, dvs (VF) och (FEM), för randvärdesproblemet

$$-u''(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta.$$

(b) Beräkna styvhetsmatrisen och lastvektorn då intervallet är indelad i 2 lika delintervall med noderna $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, och $x_2 = 1$.

Lösning: Här är en allmännare lösning:
Multiplicra pde:m med en test funktion v med $v(0) = 0$, integrera över $x \in (0,1)$ och använd partial integration:

$$\begin{aligned}
&-[u'v]_0^1 + \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 v\,dx \qquad \Longleftrightarrow\\
&-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 v\,dx \quad \Longleftrightarrow\\
&-\beta v(1) + \int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 v\,dx.
\end{aligned} \tag{3}$$

Den kontinuerliga variationsformuleringen är nu som följande: Bestäm

$$(VF) \qquad u \in V := \{w : \int_0^1 \Big(w(x)^2 + w'(x)^2\Big)\,dx < \infty, \quad w(0) = \alpha\},$$

så att

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 v\,dx + \beta v(1), \quad \forall v \in V^0,$$

där

$$V^0 := \{v : \int_0^1 \Big(v(x)^2 + v'(x)^2\Big)\,dx < \infty, \quad v(0) = 0\}.$$

För den diskreta versionen, låt $\mathcal{T}_h$ vara en likformig partition: $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{M+1}$ av $[0,1]$ till delintervallen $I_n = [x_{n-1}, x_n]$, $n = 1, \ldots M+1$. Här har vi

M-stycken interna noder: $x_1, \dots x_M$, och två randpunkter: $x_0 = 0$ och $x_{M+1} = 1$ och värför $M+1$ intervaler.

Finitaelement metoden (diskreta variationsformuleringen) är nu som följer: Finn

$$(FEM) \qquad U \in V_h := \{w_h : w_h \text{ is piecewise linear, continuous on } \mathcal{T}_h,\ w_h(0) = \alpha\},$$

så att

$$(4) \qquad \int_0^1 U' v_h'\, dx = \int_0^1 v_h\, dx + \beta v_h(1), \quad \forall v \in V_h^0,$$

där

$$V_h^0 := \{v_h : v_h \text{ is piecewise linear, continuous on } \mathcal{T}_h,\ v_h(0) = 0\}.$$

Vi använder basfunktioner φ_j, $j = 0, \dots M+1$, där $\varphi_1, \dots \varphi_M$ är de vanliga *hat-funktionerna* medan φ_0 och φ_{M+1} är *semi-hat-funktioner* viz;

$$(5) \qquad \varphi_j(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x - x_{j-1}}{h} & x_{j-1} \le x \le x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & x_j \le x \le x_{j+1} \end{cases}, \qquad j = 1, \dots M.$$

och

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h} & 0 \le x \le x_1 \\ 0, & x_1 \le x \le 1 \end{cases}, \qquad \varphi_{M+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_M}{h} & x_M \le x \le x_{M+1} \\ 0, & 0 \le x \le x_M. \end{cases}$$

Alltså, vi kan skriva nu

$$V_h = \alpha\varphi_0 \oplus [\varphi_1, \dots, \varphi_{M+1}], \quad V_h^0 = [\varphi_1, \dots, \varphi_{M+1}].$$

Med andra ord varje $U \in V_h$ kan skrivas som $U = \alpha\varphi_0 + v_h$ where $v_h \in V_h^0$, i.e.,

$$U = \alpha\varphi_0 + \xi_{1\varphi_1} + \dots \xi_{M+1}\varphi_{M+1} = \alpha\varphi_0 + \sum_{i=1}^{M+1} \xi_i \varphi_i \equiv \alpha\varphi_0 + \tilde{U},$$

där $\tilde{U} \in V_h^0$, och därmed problem (4) kan, ekvivalen formuleras som: Finn $\xi_1, \dots \xi_{M+1}$ så att

$$\int_0^1 \Big(\alpha\varphi_0' + \sum_{i=1}^{M+1} \xi_i \varphi_i'\Big)\varphi_j'\, dx = \int_0^1 \varphi_j\, dx + \beta\varphi_j(1), \quad j = 1, \dots M+1,$$

som in sin tur kan skrivas som

$$\sum_{i=1}^{M+1} \Big(\int_0^1 \varphi_j' \varphi_i'\, dx\Big)\xi_i = -\int_0^1 \varphi_0' \varphi_j'\, dx + \int_0^1 \varphi_j\, dx + \beta\varphi_j(1), \quad j = 1, \dots M+1,$$

eller som $A\xi = b$ där $A = (a_{ij})$ är den tridiagonala matrisen med elemenr

$$a_{ii} = 2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad i = 1, \dots M, \quad \text{and} \qquad a_{M+1,M+1} = 1,$$

dvs,

$$A = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

och den okännda vektorn ξ och datan b är som

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ \xi_M \\ \xi_{M+1} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1\,dx - \alpha\int_0^1 \varphi_0'\varphi_1'\,dx \\ \int_0^1 \varphi_2\,dx \\ . \\ . \\ \int_0^1 \varphi_M\,dx \\ \int_0^1 \varphi_{M+1}\,dx + \beta\varphi_{M+1}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h + \frac{1}{h}\alpha \\ h \\ . \\ . \\ h \\ \frac{h}{2} + \beta \end{bmatrix}.$$

Nu tillbaka till lösningen till uppgift 4: Då har vi $h = 1/2$ och $M = 2$. Alltså

$$A = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

and the unkown ξ and the data b are given by

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1\,dx - \alpha\int_0^1 \varphi_0'\varphi_1'\,dx \\ \int_0^1 \varphi_2\,dx \\ \int_0^1 \varphi_3\,dx + \beta\varphi_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + 2\alpha \\ 1/2 \\ 1/4 + \beta \end{bmatrix}.$$

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena värmeledningsproblem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(0,t) = 0, & u(L,t) = 1, & t > 0, \\ u(x,0) = 2\frac{x}{L} - 1, & 0 < x < L. & \end{cases}$$

Lösning: Vi homogeniserar ekvationen genom att sätta $v = u - s$, där skall s, satisfirar den stationära versionen av differentialekvationen med den inhomogena randvillkoren:

$$s''(x) = 0, \quad s(0) = 0, \quad s(L) = 1.$$

Vi har att $s(x) = Ax + B$, där $s(0) = 0$, ger $B = 0$, och $s(L) = 1$, ger $A = 1/L$. Alltså

$$s(x) = \frac{x}{L}.$$

Insättning i differentialekvation ger en homogen ekvation för v:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < L, & t > 0, \\ v(0,t) = 0, & v(L,t) = 1, & t > 0, \\ v(x,0) = 2\frac{x}{L} - 1 - \frac{x}{L} = \frac{x}{L} - 1, & 0 < x < L. & \end{cases}$$

Vi bestämmer v med variabelseparationstekniken: Sätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Då ger DE för v $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$, och vi får 2 separata ODE, en för X och en för T:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0, \qquad \text{och} \quad T' = \lambda T.$$

För T får vi lösningen

$$T(t) = T(0)e^{\lambda t}.$$

För att bestämma X har vi följande 3 alternativ:

Fall I. $\lambda = 0$. Då är $X(x) = Ax + B$. $X(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ och $X(L) = 0 \Longrightarrow A = 0$. Detta innebär att $X(x) \equiv 0$, som är en mosägelse eftersom vi söker icke-triviala (noll-skilda) lösningar.

Fall II. $\lambda > 0$. Då är $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$.

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Longrightarrow & A + B = 0 \\ X(L) = 0 \Longrightarrow & Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \Longrightarrow \quad Ae^{\sqrt{\lambda}L}\left(1 - e^{-2\sqrt{\lambda}L}\right) = 0. \end{cases}$$

Allså $A = B = 0$ även i detta fall som ger en motsägelse som i Fall I. Värför endast $\lambda < 0$ kan ge icke-trivialla lösningar:

Fall III. $\lambda < 0$. Då gäller $X(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Longrightarrow & B = 0 \\ X(L) = 0 \Longrightarrow & = A\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 (A \neq 0) \Longrightarrow \quad \sqrt{-\lambda}L = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Allså har vi egenfunktioner och egenvärdena:

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad \lambda = -\Big(\frac{n\pi}{L}\Big)^2, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Superposditionen ger

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

För att bestämma C_n har vi att

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{x}{L} - 1.$$

Alltså är C_n Fourier sin $\frac{n\pi}{L}$-koefficienterna för $\frac{x}{L} - 1$.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \Big(\frac{x}{L} - 1\Big)\sin\frac{n\pi}{L}\,dx \\ &= \frac{2}{L}\Big[\Big(\frac{x}{L} - 1\Big)\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L - \int_0^L \frac{1}{L}\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big] = -\frac{2}{n\pi}. \end{aligned} \tag{6}$$

Slutligen får vi lösningen för den ursprungliga, inhomogena differentialekvationen som:

$$u(x,t) = \frac{x}{L} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

6. Formulera och bevisa *Riemann-Lebesgue Lemma.* Hänvisad resultat måste formuleras (bevis av detta behövs inte).

Lösning: See föreläsningsanteckningar.

7. See föreläsningsanteckningar. Visa att lösningen $u \in V$ till Poissons ekvation

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u'(1) = 0,$$

minimerar energifuktionalen

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (v')^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx,$$

där $v \in V = \{v : \|v\| + \|v'\| < \infty,\ v(0) = 0\}$.

Lösning: See föreläsningsanteckningar.

MA