1. Betrakta ekvationen $\dot{u}(t) - u(t) = 0, \quad t > 0; \qquad u(0) = 1.$
Bestäm dess gobala Galerkin approximation: $U(t) = \sum_{j=0}^{q} \xi_j t^j$, då
(a) $\quad q = 1,$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad q = 2.$

Lösning: Vi sätter in U i ekvationen (obs $\dot{U}(t) = \sum_{j=1}^{q} j\xi_j t^{j-1}$), multiplicerar resultatet med $t^i,\ i = 1, \dots, q$ och integrara över $(0,1)$:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{j=1}^{q} \xi_j \int_0^1 \Big(jt^{i+j-1} - t^{i+j}\Big)\, dt = \int_0^1 t^i\, dt,$$

där bidragen från $j = 0$ som svarar mot $\xi_0 = u(0) = 1$ finns på HL. Efter integration får vi

$$\text{(2)} \qquad \sum_{j=1}^{q} \Big(\frac{j}{j+i} - \frac{1}{j+i+1}\Big)\xi_j = \frac{1}{i+1}, \quad i, j = 1, \dots, q. \Longleftrightarrow A\xi = b, \quad \text{där}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{j}{j+i} - \frac{1}{j+i+1}, & i, j = 1, \dots, q. \\ b_i = \frac{1}{i+1}, & i = 1, \dots, q. \end{cases}$$

$$q = 1: \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{6}\xi_1 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \xi_1 = 3. \quad \Longrightarrow \quad U(t) = 1 + 3t.$$

$$q = 2: \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{11} \\ \frac{10}{11} \end{bmatrix}.$$

Varför

$$U(t) = 1 + \frac{8}{11}t + \frac{10}{11}t^2.$$

2. Lös följande integro-differentialekvationen med hjälp av Laplacetransformation:

$$y'(t) + 4y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\, d\tau = e^{-t} \quad (t > 0), \qquad y(0) = 0.$$

Lösning: Laplacetransformering ger:

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) + 5\frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{s+1} \Longleftrightarrow (s + 4 + \frac{5}{s})Y(s) = \frac{1}{s+1} \Longleftrightarrow$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{s^2 + 4s + 5}{s}Y(s) = \frac{1}{s+1} \Longleftrightarrow Y(s) = \frac{s \quad + 1 - 1}{(s+1)(s^2 + 4s + 5)} \Longleftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} - \frac{1}{(s+1)(s^2 + 4s + 5)} := I - II.$$

Vi har att

$$I = \frac{1}{s^2 + 4s + 5} = \frac{1}{(s+2)^2 + 1} \subset^{L^{-1}} e^{-2t} \sin t := y_1(t).$$

och

$$\text{(4)} \qquad \begin{aligned} II &= \frac{1}{(s+1)(s^2 + 4s + 5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 5} \\ &= \frac{(A+B)s^2 + (4A + B + C)s + 5A + C}{(s+1)(s^2 + 4s + 5)}. \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienter ger att

$$\begin{cases} A \quad +B \qquad\quad = 0 \\ 4A \quad +B \quad +C = 0 \\ 5A \qquad\quad +C = 1 \end{cases} \iff A = 1/2, \quad B = -1/2, \quad C = -3/2.$$

Detta ger att

$$(5) \qquad \begin{aligned} II &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s}{(S+2)^2+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(S+2)^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s+2}{(S+2)^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(S+2)^2+1} \\ &\subset^{L^{-1}} \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t := y_2(t). \end{aligned}$$

Slutligen

$$(6) \qquad \begin{aligned} y(t) &= y_1(t) - y_2(t) = e^{-2t}\sin t - \Big(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(- e^{-t} + e^{-2t}\cos t + 3e^{-2t}\sin t\Big). \end{aligned}$$

3. (a) Utveckla $f = |\sin x|$ i Fourierserie.

(b) Använd (a) och bestäm summan av följande serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Lösning: a) $f(x) = |\sin x|$ är jämn funktion med perioden $2L = \pi$ $(L = \pi/2)$. Därför $b_n = 0$, $\forall n$; och

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\cos(2nx)\,dx.$$

$$n = 0, \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} n \ge 1, \quad \Longrightarrow \quad a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}[\sin(1-2n)x + \sin(1+2n)x]\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\cos(1-2n)x}{1-2n} - \frac{\cos(1+2n)x}{1+2n}\Big]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\Big] = \frac{2}{\pi}\frac{2}{1-4n^2} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}. \end{aligned}$$

Därför är

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2nx) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

(b)

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. Betrakta randvärdesproblemet:

$$(8) \qquad -u''(x) = 2, \quad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = u'(1) = 1.$$

Låt $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1$ vara en partition av intervallet $[0,1]$ och V_h, $(h = 1/2)$ motsvarande finitelement funktionsrum bestående av styckvis kontinuerlig, linjära funktioner.

(a) Bestäm den exakta lösningen till (8) .
(b) Beräkna, om möjligt, en finitelement approximation $U \in V_h$ av u.
(c) Förklara varför problemet i (8) kallas *illa ställd*?

Lösning: (a) Med upprep. integration har vi att:

$$-u''(x) = 2 \Longrightarrow u''(x) = -2 \Longrightarrow u'(x) = -2x + A \Longrightarrow u(x) = -x^2 + Ax + B,$$

där konstanterna A och B bestäms ur randdata:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'(0) & = -0 + A = 1 \Longrightarrow A = 1 \\ u'(1) & = -2 + A = 1 \Longrightarrow A = 3. \end{array} \right. \tag{9}$$

Dvs, (8) saknar lösning.
(b)-(c) Vi använder variationsformulering:

$$\int_0^1 -u''v\,dx = \int_0^1 2 \cdot v\,dx. \tag{10}$$

Partiell integration ger

$$\begin{aligned} VL = [PI] &= \Big[-u'v \Big]_0^1 - \int_0^1 -u'v\,dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx \\ &= -v(1) + v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx = HL. \end{aligned} \tag{11}$$

Variationsformuleringen blir då: sök $u \in V := \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty\}$ så att

$$\int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V \tag{12}$$

Här introduceras rummet

$$V_h = \{\text{alla kontinuerliga styckvis linjära funktioner på } T_h\}$$

med bas funktionerna:

$$\varphi_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -2x+1, & 0 \le x \le 1/2, \\ 0, & 1/2 \le x \le 1, \end{array} \right. \qquad \varphi_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ -2x+2, & 1/2 \le x \le 1, \end{array} \right.$$

och

$$\varphi_2(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2x-1, & 1/2 \le x \le 1. \end{array} \right.$$

Finitelementmetoden (FEM): sök $U \in V_h$ så att

$$\int_0^1 U'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V_h. \tag{13}$$

Ansätt $U = \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2$ då är $U' = \xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2'$. Insättning i (FEM) (13) med $v = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2$ ger

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_0'\,dx &= 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1) \\ \int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_1'\,dx &= 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1) \\ \int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_2'\,dx &= 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1) \end{aligned} \tag{14}$$

Styvhetsmatrisen blir (räkna själv!)

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Det leder till ett linjärt ekvationssystem $A\xi = b$ för den okända vektorn $\xi = (\xi_0, xi_1, \xi_2)$ med högerled:

$$b = \begin{pmatrix} 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1) = 1/2 - 1 + 0 \\ 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1) = 1 - 0 + 0 \\ 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1) = 1/2 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

Observera att A är inte inverterbar. Eftersom det inte finns några exakta lösningar kan man inte heller förvänta sig att det approximativa metoden kan ge några lösningar. Alltså problemet är illa ställd från början.

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena värmeledningsproblem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u(\pi,t) = -1, & t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Lösning: Vi homogeniserar ekvationen genom att sätta $v = u - s$, där skall s, satisfira den stationära versionen av differentialekvationen med inhomogena randvillkor enligt:

$$s''(x) = 0, \quad s(0) = 1, \quad s(\pi) = -1.$$

Vi har att $s(x) = Ax + B$, där $s(0) = 1$, ger $B = 1$, och $s(\pi) = -1$, ger $A = -2/\pi$. Alltså

$$s(x) = 1 - \frac{2}{\pi}x.$$

Insättning i differentialekvation ger en homogen ekvation för v:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0, & & t > 0, \\ v(x,0) = \cos x + 2\frac{x}{\pi} - 1 & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Vi bestämmer v med variabelseparationstekniken: Sätt $v(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Då ger DE för v $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$, och vi får 2 separata ODE, en för X och en för T:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \qquad \text{och} \quad T' = \lambda T.$$

För T får vi lösningen

$$T(t) = T(0)e^{\lambda t}.$$

För att bestämma X har vi följande 3 alternativ:

Fall I. $\lambda = 0$. Då är $X(x) = Ax + B$. $X(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ och $X(\pi) = 0 \Longrightarrow A = 0$. Detta innebär att $X(x) \equiv 0$, som är en motsägelse eftersom vi söker icke-triviala (noll-skilda) lösningar.

Fall II. $\lambda > 0$. Då är $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$.

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Longrightarrow & A + B = 0 \\ X(\pi) = 0 \Longrightarrow & Ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \Longrightarrow \quad Ae^{\sqrt{\lambda}L}\left(1 - e^{-2\sqrt{\lambda}L}\right) = 0. \end{cases}$$

Allså $A = B = 0$ även i detta fall som ger en motsägelse som i Fall I. Värför endast $\lambda < 0$ kan ge icke-triviala lösningar:

Fall III. $\lambda < 0$. Då gäller $X(x) = A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Longrightarrow & B = 0 \\ X(\pi) = 0 \Longrightarrow & = A\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0\,(A \neq 0) \Longrightarrow \quad \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Allså har vi egenfunktioner och egenvärdena:

$$X_n(x) = \sin nx, \qquad \lambda = -n^2, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Superposditionen ger

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n^2 t}\sin nx.$$

För att bestämma C_n har vi att

$$v(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx=\cos x+\frac{2x}{\pi}-1$$

Alltså är C_n Fourier $\sin nx$-koefficienterna för $\cos x+\frac{2x}{\pi}-1$.

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos x+\frac{2x}{\pi}-1)\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{2x}{\pi}-1)\sin nx\,dx := I_n+II_n. \end{aligned} \tag{15}$$

$$I_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} cosx\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{-\cos 2x}{2}\Big]_0^{\pi}=0.$$

$$\begin{aligned} I_n=\{n\neq 1\} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\Big[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[(-1)^{n+2}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\Big)+\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\Big)\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\begin{cases} 0, & n \text{ udda} \\ \frac{8k}{4k^2-1} & n=2k, \quad k=1,2,\dots \end{cases} \end{aligned} \tag{16}$$

För andra termen har vi

$$\begin{aligned} II_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[(\frac{2x}{\pi}-1)\frac{-\cos nx}{n}\Big]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{-\cos nx}{n}\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}[(-1)^{n+1}-1]=\begin{cases} 0, & n \text{ udda} \\ \frac{-4}{2k\pi}, & n=2k, \quad k=1,2,\dots \end{cases} \end{aligned} \tag{17}$$

Slutligen får vi lösningen för den ursprungliga, inhomogena differentialekvationen som:

$$\begin{aligned} \text{Svar} \qquad u(x,t) &= 1-\frac{2x}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{8k}{4k^2-1}-\frac{2}{k}\Big)e^{-4k^2t}\sin 2kx \\ &= 1-\frac{2x}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(4k^2-1)}e^{-4k^2t}\sin 2kx. \end{aligned} \tag{18}$$

6. och **7.**

Lösning: See föreläsningsanteckningar.

MA