Lösningar, TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 p, 06-08-30

1. Antag att $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ är Lipschitz kontinuerlig. Bestäm den linjära interplonten $\pi f \in \mathcal{P}(0, 1)$, om f väljs som
(a) $x^n + a$, (b) $\cos(n\pi x)$, (c) $\sin(n\pi x) + \cos(n\pi x)$,
där a är reell tal och n är positiv heltal.

Lösning: Den linjära interpolanten $\pi f \in \mathcal{P}(x_0, x_1)$ kan skrivas som

$$\pi f(x) = f(x_0)\varphi_0(x) + = f(x_1)\varphi_1(x),$$

där $\varphi_i(x)$ är en bas för $\mathcal{P}(x_0, x_1)$ av linjära polynom på$I = [x_0, x_1]$. Här har vi $x_0 = 0$ och $x_1 = 1$,

$$\varphi_0(x) = 1 - x, \qquad \varphi_1(x) = x.$$

(a) Därför linjära interpolanten av $f(x) = x^n + a$ på I kan skrivas som:

$$\begin{aligned} \pi f(x) &= \sum_{i=1}^{2} f(x_i)\varphi(x_i) = f(0)\varphi_0(x) + f(1)\varphi_1(x) \\ &= a \cdot (1 - x) + (1 + a) \cdot x = a + x. \end{aligned} \tag{1}$$

Observera att resultat är oberoende av n (värför?).

(b) Med $f(x) = \cos(n\pi x)$, får vi (analogt) att

$$\begin{aligned} \pi f(x) &= \sum_{i=1}^{2} f(x_i)\varphi(x_i) = f(0)\varphi_0(x) + f(1)\varphi_1(x) \\ &= \cos(0) \cdot (1 - x) + \cos(n\pi) \cdot x = \\ &= \begin{cases} 1 - x + x = 1 & \text{om } n \text{ jänm då} \quad \cos(n\pi) = +1 \\ 1 - x - x = 1 - 2x & \text{om } n \text{ udda då} \quad \cos(n\pi) = -1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Här har vi fått en n-beroende resultat.
(c) Eftersom $\sin(0) = \sin(n\pi) = 0$ så har (c) samma linjär interpolant som (b).

2. Lös följande differentialekvation för $t \geq 0$ med hjälp av Laplacetransform

$$y''(t) + 4y'(t) + 13y(t) = 3e^{-2t}\cos 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Lösning: Laplacetransformering ger

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4sY(s) - 4y(0) + 13Y(s) = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 9}.$$

Gemon att ersätta $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ får vi

$$(s^2 + 4s + 13)Y(s) = -1 + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2 + 9}.$$

Alltså

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2 + 4s + 13} + \frac{3(s+2)}{(s^2 + 4s + 13)^2} := I + II.$$

Men eftersom $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9$ kan vi skriva

$$I = -\frac{1}{s^2 + 4s + 13} = \frac{-1}{(s+2)^2 + 9} = -\frac{1}{3}\Big(\frac{3}{(s+2)^2 + 9}\Big).$$

Vilket har inverstransformen

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[-\frac{1}{s^2+4s+13}\Big] = -\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

Vidare gäller det att

$$II = \frac{3(s+2)}{(s^2+4s+13)^2} = -\frac{3}{2}\frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{s^2+4s+13}\Big) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\Big(\frac{3}{(s+2)^2+9}\Big).$$

Därför har II inverstransformen

$$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{3(s+2)}{s^2+4s+13}\Big] = \frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t.$$

Slutligen genom att lägga ihop I och II får vi lösningen:

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t + \frac{1}{2}te^{-2t}\sin 3t = \frac{1}{6}(3t-2)e^{-2t}\sin 3t.$$

3. Utveckla funktionen $g(x) = \cos(x)$ i Fourier sinusserier i intervallet $(0, \pi/2)$. Använd resultatet för att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}.$$

Lösning: Vi utvecklar $f(x) = \cos x$ till en $(2L = \pi)$-periodisk *udda* funktion f i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Vi har att

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\Big) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos n\Omega x + b_n\sin n\Omega x\Big).$$

Eftersom $f(t)$ är udda så har vi $a_n = 0$ för alla $n \geq 0$. Vidare $T = \pi = 2L \Longrightarrow \Omega = 2\pi/T = 2 = \pi/L$. Dvs

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\sin\frac{n\pi x}{\pi/2}\,dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\sin 2nx\,dx = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x]\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\Big[\frac{-1}{2n+1}\cos(2n+1)x\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big]_0^{\pi/2}\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\Big) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}.
\end{aligned}$$

Alltså vi har en utveckling av den udda fuktionen $f(x)$ i Fourier sinusserier som

$$f(x) \approx \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx, \tag{3}$$

därför har funktionen $g(x) = \cos x$ en udda utveckling på $(0, \pi/2)$ som,

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx. \qquad x \in (0, \pi/2). \tag{4}$$

För att beräkna summan multiplicerar vi ekvationen (4) med $\cos x$ och integrerar resultatet över $(0, \pi/2)$. Genom att byta summan och integralens ordning får vi

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\cos x\,dx = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\int_0^{\pi/2}\sin 2nx\cos x\,dx \tag{5}$$

Observera att integralen på högerledet är $\frac{\pi}{4}b_n$ som vi har redan beräknat ovan:

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\sin 2nx\,dx=\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\quad\Longrightarrow\quad\int_0^{\pi/2}\cos x\,\sin 2nx\,dx=\frac{2n}{4n^2-1}.$$

Alltså (5) kan skrivas som

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\Big)dx=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\cdot\frac{2n}{4n^2-1},\tag{6}$$

vilket ger

$$\frac{\pi}{4}=\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2},\quad i.e.\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{64}.\tag{7}$$

4. (a) Bestäm den analytiska lösningen till randvärdesproblemet

$$-u''(x)+u'(x)=1,\quad 0<x<1,\qquad u(0)=u(1)=0.$$

(b) Dela in intervallet i 3 lika delintervall med noderna $x_0=0$, $x_1=1/3$, $x_2=2/3$ och $x_3=1$. Beräkna den styckvis linjära finita element lösningen $U(x)$ på denna partition.

Lösning: (a) $u''(x)+u'(x)=1$ har karakteristiska ekvationen: $-r^2+r=0$, med rötterna $r_1=0$ och $r_2=1$. Därför är

$$u_h(x)=C_1+C_2e^x,$$

en homogen lösning. Vidare, har ekvationen en partikulärlösning som $u_p(x)=Ax$. Insättning av partikulärlösningen i ekvationen ger $A=1$. Alltså, vi har att:

$$u(x)=u_h(x)+u_p(x)=C_1+C_2e^x+x.$$

Randdata ger

$$\begin{aligned}u(0)=&\quad C_1+C_2=0,\\ u(1)=&\quad C_1+C_2e+1=0,\end{aligned}$$

som har lösningen $C_1=\frac{1}{e-1}$ och $C_2=\frac{-1}{e-1}$. Alltså exakta lösningen är:

$$u(x)=x+\frac{1}{e-1}\Big(1-e^x\Big).$$

(b) Med homogena randdata och partitionen $x_0=0$, $x_1=1/3$, $x_2=2/3$, $x_3=1$, behöver vi bara basfunktioner φ_1 och φ_1 med $\varphi_i(x_j)=\delta_{ij}$, $i=1,2$, $j=1,2,3,4$:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1/3,\\ -3x+2, & 1/3\le x\le 2/3\\ 0, & 2/3\le x\le 1,\end{cases}\qquad \varphi_2(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1/3,\\ 3x-1, & 1/3\le x\le 2/3\\ -3x+3, & 2/3\le x\le 1.\end{cases}$$

Variationsformuleringen är

$$(VF)\qquad\int_0^1 u'v'\,dx+\int_0^1 u'v\,dx=\int_0^1 v\,dx,\quad\forall v\in V_h,$$

där $V_h\subset H_0^1$ så att

$$V_h=\{v: v\text{ är styckvis linjör, kontinuerlig },v(0)=v(1)=0\}.$$

Vi söker FE lösningen $U(x)\in V_h$ som uppfyller (VF). Dvs vi söker

$$U(x)=\xi_1\varphi_1(x)+\xi_2\varphi_2(x),\tag{8}$$

sä att

$$(FEM)\qquad\int_0^1 U'v'\,dx+\int_0^1 U'v\,dx=\int_0^1 v\,dx,\quad\forall v\in V_h.$$

Nu genom att välja v som basfunktioner φ_1 och φ_2, och stoppa in U från (1) i (FEM) får vi följande matris ekvation för att bestämma nodvärdena $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

I vänster ledet ovan första koefficientmatrisen är våran massmatris och den andra är convektionsmatrisen. Allså vi har att

$$1/3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Detta skriver i kompakt form som

$$\begin{bmatrix} 6 & -5/2 \\ -7/2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 6 & 5/2 \\ 7/2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

Där $D = 36 - 35/4$. Allså är $\xi_1 = 17/6D$ och $\xi_2 = 19/6D$, och vi har

$$U(x) = \frac{17}{6D}\varphi_1(x) + \frac{19}{6D}\varphi_2(x),$$

dvs

$$U(x) = \begin{cases} \frac{17}{6D}(3x) = \frac{17}{2D}x, & 0 \le x \le 1/3, \\ \frac{17}{6D}(-3x+2) + \frac{19}{6D}(3x-1) = \frac{1}{D}(x + \frac{5}{2}), & 1/3 \le x \le 2/3 \\ \frac{19}{6D}(-3x+3) = \frac{19}{2D}(-x+1) & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

5. Bestäm lösningen till följande värmeledningsekvation:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + u, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u_t(x,0) = 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Lösning. Sätt $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Vi får (efter division med $X(x)T(t) \neq 0$) att

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \lambda < 0,$$

där $\lambda < 0$ är den alternativ som är konsistent med randdata. Vi har då

$$X(x) = A \sin \sqrt{-\lambda} x + B \cos \sqrt{-\lambda} x,$$

där $X(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ medan $X(1) = 0 \Longrightarrow A \sin \sqrt{-\lambda} = 0$. Eftersom vi söker icke triviala lösningar är $A \neq 0$ och varför är egenvärden och egenfunktionerna

$$\sqrt{-\lambda} = n\pi \Longrightarrow \lambda = -n^2\pi^2, \quad X_n(x) = \sin n\pi x, \qquad n \ge 1.$$

Vi återgår till T och där har vi

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = \lambda_n - 1 = -(1 + n^2\pi^2).$$

Integrering över t ger

$$T_n(t) = C_n e^{-(1+n^2\pi^2)t}.$$

Superposition ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-(1+n^2\pi^2)t} \sin n\pi x. \tag{9}$$

Kvarstår att använda begynnelsevillkoret för att bestämma D_n. Vi deriverar (9) med avseende på t

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -D_n(1+n^2\pi^2)e^{-(1+n^2\pi^2)t}\sin n\pi x. \tag{10}$$

Begynnelsevillkoret ger

$$1 = u_t(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} D_n(1+n^2\pi^2)\sin n\pi x. \tag{11}$$

Genom att multiplicera (11) med $\sin k\pi x$ och integrera över $(0,1)$ fås

$$-\sum_{n=1}^{\infty} D_n(1+n^2\pi^2)\int_0^1 \sin n\pi x \sin k\pi x\,dx = \int_0^1 \sin k\pi x\,dx. \tag{12}$$

Nu har vi att vänster ledet (VL) i (12) är

$$VL = \begin{cases} -\frac{1}{2}D_n(1+n^2\pi^2), & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases} \tag{13}$$

Vidare är

$$HL = -\Big[\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\Big]\Big|_0^1 = -\frac{1}{k\pi}\Big((-1)^k - 1\Big). \tag{14}$$

Alltså (12) kan skrivas som

$$\frac{1}{k\pi}\Big((-1)^k - 1\Big) = \frac{1}{2}D_k(1+k^2\pi^2),$$

dvs

$$D_k = \begin{cases} \frac{-4}{k\pi(1+\pi^2k^2)}, & k \text{ udda} \\ 0 & k \text{ jämn}, \end{cases} \tag{15}$$

och slutligen har vi att

$$u(x,t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(1+\pi^2(2n+1)^2)} e^{-(1+\pi^2(2n+1)^2)t}\sin(2n+1)\pi x.$$

6. Funktionen f är p-periodisk och a är ett reellt tal. Visa att integralen

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx,$$

är oberoende av a.

7.

Betrakta differentialekvationen

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Verifiera att finitelement lösningen: $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen i energinormen: Dvs visa att

$$||(u-U)'||_a \leq ||(u-v)'||_a \quad \forall v \in V_h^0, \qquad ||w||_a = \Big(\int_0^1 aw^2\,dx\Big)^{1/2},$$

med $V_h^0 := \{\text{styckvis linjära kontinuerliga } v \text{ med } \quad v(0) = v(1) = 0\}$.

6. och **7.** See föreläsningsanteckningar.

MA