Hjälpmedel: Utdelad tabell för Laplacetransformer
Telefon: Mikael Persson/Jonas Hartwig: 0762-721860
0762-721861
2005–08–24 kl. 8.30-12.30

BERÄKNINGSMATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

TMA682 Tillämpad Matematik K2/Bt2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Antag att $f(t) = 0$ för $t < 0$ och dess Laplacetransform är $F(s) = \frac{2s^2+s+6}{s(s+2)}$. Finn $f(t)$.

2. $\Pi_1 f$ är den linjära interpolanten av f i intervallet (a, b). Visa att:

$$||f - \Pi_1 f||_{L_2(a,b)} \leq (b-a)^2 ||f''||_{L_2(a,b)},$$

   då

$$||v||_{L_2(a,b)} = \Big(\int_a^b v(x)^2 \, dx \Big)^{1/2}.$$

3. (a) Antag att *drivfunktionen* $f(t)$-är 2π periodisk och bestäm allmänna lösningen $y(t) := y_h(t) + y_p(t)$ till differentialekvationen

$$y''(t) + 4y(t) = f(t).$$

   (b) $y_p(t)$:s Fourierkoefficinter beror av *en del av* f:s komplexa Fourierkoefficienter. Vilka?

4. Betrakta randvärdesproblemet:

$$-u''(x) = 2, \quad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = u'(1) = 1. \tag{1}$$

   Låt $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1$ vara en partition av intervallet $[0, 1]$ och V_h, $(h = 1/2)$ motsvarande finitelement funktionsrum bestående av styckvis kontinuerlig, linjära funktioner.

   (a) Bestäm den exakta lösningen till (1).

   (b) Beräkna, om möjligt, en finitelement approximation $U \in V_h$ av u.

   (c) Förklara värför problemet i (1) kallas *illa ställd*?

5. Bestäm lösningen till följande inhomogena värmeledningsproblem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, & t > 0, \\ u(0,t) = 1, & u(\pi, t) = -1, & t > 0, \\ u(x,0) = \cos x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

6. Formulera och bevisa *Bessel's olikhet*.

7. Härled en *a priori* feluppskattning för Poissons ekvation:

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

MA