TMA132 Fourieranalys F2/Kf2, 5 poäng

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

1. Bestäm det polynom $P(x)$ av högst andra graden som minimerar
$$\int_{-1}^{1}\left[(1-\sqrt{|x|})-P(x)\right]^2 dx. \qquad (6p)$$

2. Lös randvärdesproblemet (c är konstant),
$$\begin{cases} cu_x+u_y+2yu=0, & -\infty<x<\infty, \quad y>0, \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty, \end{cases} \qquad (6p)$$
Ledning: Fouriertransformera i x-led.

3. Utveckla $f(x)$ i cosinusserie med perioden 2π, där
$$f(x)=\begin{cases} \sin(x), & 0<x<\pi/2, \\ 0, & x>\pi/2. \end{cases} \qquad (6p)$$

4. Lös värmeledningsekvationen
$$\begin{cases} u_{xx}=u_t-2, & 0<x<1, & t>0, \\ u(0,t)=1, & u_x(1,t)+u(1,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=0, & 0<x<1. \end{cases} \qquad (6p)$$

5. Låt f vara en funktion i $L^1(\mathbb{R})$. Definiera
$$F(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi). \qquad (6p)$$
a) Visa att F är 2π periodisk.

b) Härled ett samband mellan F:s Fourierkoefficienter och f:s Fouriertransform.

c) Bevisa (under lämpliga förutsättningar) *Poissons Summationsformel:*
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2k\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n).$$

6. Lös Laplaces ekvation $u_{xx}+u_{yy}=0$ i halvcirkelskivan $x^2+y^2<1, y>0$, om $u=0$ på sträckan $y=0, -1\le x\le 1$ och $u=y^3$ på halvcirkeln $x^2+y^2=1,\ y\ge 0$. (6p)

7. Låt $\{\varphi_n\}_1^\infty$ vara en ortonormalmängd i $L^2(a,b)$. Visa att följande villkor är ekvivalenta:

a) Om $<f,\varphi_n>=0$, för alla n, så är $f=0$.

b) För varje $f\in L^2(a,b)$ är $f=\sum_{n=1}^\infty <f,\varphi_n>\varphi_n$ med konvergens i norm.

c) För varje $f\in L^2(a,b)$ gäller $||f||^2=\sum_{n=1}^\infty |<f,\varphi_n>|^2$. (7p)

8. Visa Fouriers inversionssats, då f och $\hat{f}$ tillhör L^1. (7p)

MA