Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA131 Fourieranalys för F2/Kf2** den 17/1 1998, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Fredrik Ekstedt, ankn. 5308.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Bestäm med hjälp av Fouriertransform en lösning till

$$u''(t) - u(t) = te^{-2|t|}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7p}$$

2. Bestäm en lösning till

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{8p}$$

3. Bestäm den diskreta Fouriertransformen av $x_n = c^n,\ n = 0, 1, \ldots, N-1$, där c är en reell konstant, $-1 < c < 1$. Använd sedan Parsevals formel för att beräkna

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} \frac{1-c^2}{1+c^2-2c\cos\frac{2m\pi}{N}}. \tag{7p}$$

4. Låt

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1-|x|, & \text{om } |x| \le 1, \\ 0, & \text{om } |x| > 1. \end{cases}$$

Bestäm konstanter c_k, $k = 0, 1, \ldots, N$, så att

$$\int_0^\infty \Big[e^{-x} - \sum_{k=0}^{N} c_k\varphi(x-2k-1)\Big]^2\,dx$$

blir så litet som möjligt. (7p)

5. Lös ekvationen $\nabla^2 u + u = 0$ i cirkeln $r < 1$ med randvillkoret $u(1,\theta) = \theta(\pi - |\theta|)$, $-\pi < \theta \le \pi$. (r och θ är polära koordinater.) (7p)

6. Antag att f är 2π-periodisk och styckvis kontinuerlig och har Fourierserien $\sum_{n\neq 0} c_n e^{in\theta}$. Visa att

$$\int_0^\theta f(\varphi)\,d\varphi = C_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{in\theta} \qquad \text{för alla } \theta,$$

där C_0 är en konstant. (7p)

7. Visa Fouriers inversionssats under förutsättning att f och $\hat{f}$ tillhör L^1. (Antag också att f är kontinuerlig.) (7p)

KH