Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA131 Fourieranalys för F2/Kf2** den 20/8 1998, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Beta, Standard Math. Tables. Typgodkänd räknedosa.
Telefon: Robert Bohlin, ankn. 5334.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Funktionen $f(x)$ är 2π-periodisk, och det gäller att
$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| \le a, \\ 0, & a < |x| \le \pi, \end{cases}$$
där a är en konstant, $0 < a < \pi$. Utveckla $f(x)$ i trigonometrisk Fourierserie. Använd resultatet för att beräkna
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{na}{2}}{n^2} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4 \frac{na}{2}}{n^4}. \qquad (7p)$$

2. Lös problemet
$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 2, \\ &u(x,0) = x - 1. \end{aligned} \qquad (8p)$$

3. Den styckvis glatta funktionen $f(x)$ har Fouriertransformen
$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+x^2} \cos \xi x \, dx.$$
Ange $f(x)$ och beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \cos \xi \, d\xi$. (7p)

4. Bestäm en lösning till problemet
$$\begin{aligned} &x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-x)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0, \\ &u(x,t) \text{ begränsad då } x \to 0^+, \\ &u(x,0) = e^{-x}. \end{aligned}$$
Ledning: Laguerrepolynomen $L_n(x)$ satisfierar differentialekvationen $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$. Gör en lämplig ansats. (7p)

5. Lös ekvationen $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ i halvcirkeln $r < 1$, $0 < \theta < \pi$ (där $u = u(r,\theta)$, r och θ är polära koordinater, och k är en given positiv konstant) med randvillkoren $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$ och $u(1,\theta) = \sin^2\theta$. För att en lösning skall finnas, måste k uppfylla ett visst villkor. Vilket? (7p)

6. Låt $\{\varphi_n\}_1^\infty$ vara en ortonormalmängd i $L^2(a,b)$. Visa att följande villkor är ekvivalenta:
(a) Om $\langle f, \varphi_n \rangle = 0$ för alla n, så är $f = 0$.
(b) För varje $f \in L^2(a,b)$ är $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ med konvergens i norm.
(c) För varje $f \in L^2(a,b)$ gäller $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2$.
Satsen om bästa approximation i $L^2(a,b)$ (projektionssatsen) får anses känd. (7p)

7. Låt $\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n W^{-nm}$, där $W = e^{2\pi i/N}$, $m = 0, \ldots, N-1$, vara den diskreta Fouriertransformen av a_n, $n = 0, \ldots, N-1$. Visa att $a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m W^{nm}$. (7p)

KH

Svar

1. $f(x) = \dfrac{a}{2\pi} + \dfrac{4}{\pi a}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 \frac{na}{2}}{n^2} \cos nx.$ Summorna är $\dfrac{a}{4}(\pi - \dfrac{a}{2})$ resp. $\dfrac{a^2}{16}(\dfrac{2a\pi}{3} - \dfrac{a^2}{2})$

2. $u(x,t) = 2x - \dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+\frac{1}{2})\pi + (-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2} e^{-k(n+\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x$

3. $\dfrac{\pi}{2}\cosh 1$

4. $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} e^{-nt} L_n(x)$

5. $u(r,\theta) = -\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1,3,5,\ldots} \dfrac{1}{n(n^2-4)} \dfrac{J_n(kr)}{J_n(k)} \sin n\theta.$ Villkor: $J_n(k) \neq 0$ för udda n