Slumpvandringar och likströmskretsar

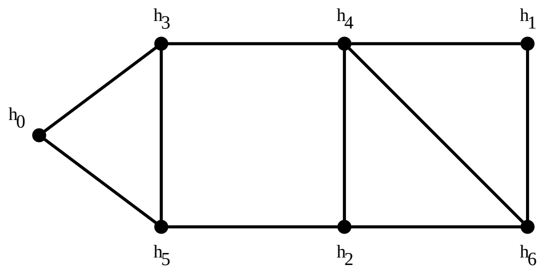
Olle Häggström*

Juni 1999

*Matematisk statistik, Chalmers Tekniska Högskola, 412 96 Göteborg, olleh@math.chalmers.se

Det är ganska ovanligt med matematiska metoder som å ena sidan är kraftfulla nog att komma till direkt användning vid matematikens forskningsfront, men som å andra sidan går bra att (utan att överförenkla) förklara för en person vars kunskaper i ämnet ligger på gymnasienivå. Ett av de få exempel jag känner till är sambandet mellan slumpvandringar och likströmskretsar. Exempel på användning av detta samband i modern matematisk forskning finns i artiklarna [GKZ] och [HM], och jag skall här försöka ge en populär introduktion till vad det är fråga om. Förutom gymnasiematematik hoppas jag att du som läser detta någon gång stött på elementär ellära.

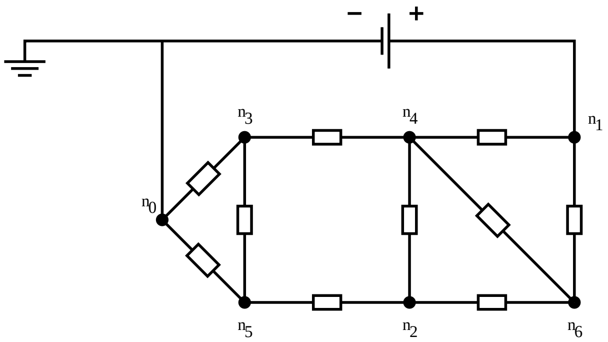
Tänk dig en person X som är ute på en pubrunda, och som just nu befinner sig i gathörnet h_2 i staden i Figur 1.



Figur 1. X befinner sig i gathörnet h_2, och kommer att slumpvandra tills han når h_0 eller h_1.

I gathörnen h_0 och h_1 finns två pubar. För att ta sig till någon av dessa tillämpar X (på grund av sitt överförfriskade tillstånd) följande strategi: Han väljer en av de tre gatorna som löper ut från h_2 på måfå (var och en med sannolikheten $\frac{1}{3}$). Han kommer då fram till ett nytt gathörn, varifrån han väljer en av gatorna, inklusive den på vilken han anlände, på måfå. Så håller han på tills han når h_0 eller h_1, varvid han stannar. Detta kallas för en slumpvandring; på engelska kallas det ibland för "drunkard's walk", även om "random walk" nog får anses vara den vanligaste termen. Man kan bevisa att sannolikheten att X till slut når h_0 eller h_1 är 1. Den fråga jag här skall diskutera är: hur stor är sannolikheten att X når h_1 före h_0?

Låt oss dessförinnan betrakta ett annat problem. I likströmskretsen i Figur 2 är ett envoltsbatteri inkopplat mellan noderna n_0 och n_1. Noden n_0 är jordad, och i övrigt är ettohmsmotstånd inkopplade enligt figuren.



Figur 2: En likströmskrets. Spänningskällan är på 1 V, och alla resistorer är på 1 Ω.

På så sätt får n_0 potentialen 0 V medan n_1 får potentialen 1 V. Frågan är nu vilken potential noden n_2 erhåller.

Detta löses på följande sätt: Kalla två noder n_i och n_j "grannar" om det ligger ett motstånd mellan n_i och n_j. Låt V_i beteckna potentialen i noden n_i och låt, då i och j är grannar, I_{ij} beteckna strömmen mellan n_i och n_j. Ohms lag (strömmen är lika med spänningen delat med resistansen) ger

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{1} = V_i - V_j. \tag{1}$$

Kirchoffs strömlag säger oss att totala strömmen in i noden n_2 är 0, dvs att

$$I_{42} + I_{52} + I_{62} = 0. \tag{2}$$

Genom att kombinera ekvationerna (1) och (2) får vi

$$(V_4 - V_2) + (V_5 - V_2) + (V_6 - V_2) = 0$$

och bryter vi ut V_2 får vi

$$V_2 = \frac{1}{3}(V_4 + V_5 + V_6) \tag{3}$$

så att potentialen i n_2 alltså är medelvärdet av potentialerna i dess grannar. Motsvarande gäller för noderna n_3, n_4, n_5 och n_6. Eftersom $V_0 = 0$ och $V_1 = 1$, erhålles ekvationssystemet

$$\begin{cases} V_2 = \frac{1}{3}(V_4 + V_5 + V_6) \\ V_3 = \frac{1}{3}(0 + V_4 + V_5) \\ V_4 = \frac{1}{4}(1 + V_2 + V_3 + V_6) \\ V_5 = \frac{1}{3}(0 + V_2 + V_3) \\ V_6 = \frac{1}{3}(1 + V_2 + V_4) \end{cases} \tag{4}$$

vilket har (den entydiga) lösningen

$$\begin{cases} V_2 = \frac{73}{130} & \approx & 0.561 \text{ V} \\ V_3 = \frac{41}{130} & \approx & 0.315 \text{ V} \\ V_4 = \frac{17}{26} & \approx & 0.654 \text{ V} \\ V_5 = \frac{19}{65} & \approx & 0.292 \text{ V} \\ V_6 = \frac{48}{65} & \approx & 0.738 \text{ V} \end{cases}$$

som kan beräknas antingen för hand (vilket dock är en smula arbetsamt) eller med lämpligt datorprogram.

Åter till det ursprungliga problemet med den törstige herr X. Den observante läsaren har säkert noterat likheten mellan Figur 1 och Figur 2, samt gissat att denna inte är någon tillfällighet. Låt P_i (för $i = 2, 3, \ldots, 6$) stå för sannolikheten att X hittar till h_1 före h_0 givet att han befinner sig i h_i. Eftersom han startar i h_2 är det P_2 vi vill beräkna. Då han i nästa steg befinner sig i h_4, h_5 eller h_6, med sannolikhet $\frac{1}{3}$ vardera, har vi

$$P_2 = \frac{1}{3}(P_4 + P_5 + P_6).$$

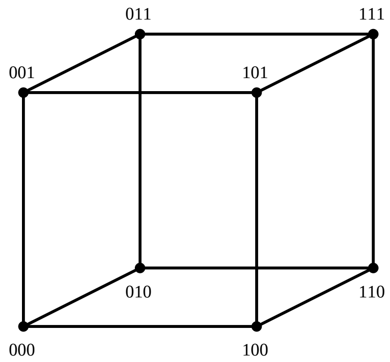
Observera likheten mellan denna ekvation och ekvation (3)! Vi får motsvarande ekvationer för P_3, P_4, P_5 och P_6, och vi har även att $P_0 = 0$ och $P_1 = 1$. Således är ekvationssystemet för $P_2, \ldots, P_6$ exakt detsamma som för $V_2, \ldots, V_6$, och vi drar slutsatsen att

$$P_2 = V_2 = \frac{73}{130},$$

dvs att slumpvandraren med sannolikhet $\frac{73}{130}$ når h_1 före h_0.

Vi har alltså ett samband mellan slumpvandringar och elektriska kretsar. Denna gäller, givetvis, mer allmänt än just för nätverket i Figur 1 och 2. Vad har vi då för nytta av sambandet om det ändå är samma ekvationssystem som vi behöver lösa i båda fallen? Svaret är att vi ibland har möjlighet att ta till vissa "knep" som är mer uppenbara för elektriska nät än för slumpvandringar. (Motsatt förhållande inträffar också ibland – att sannolikhetsteoretiska resonemang ger nya insikter i elläran.)

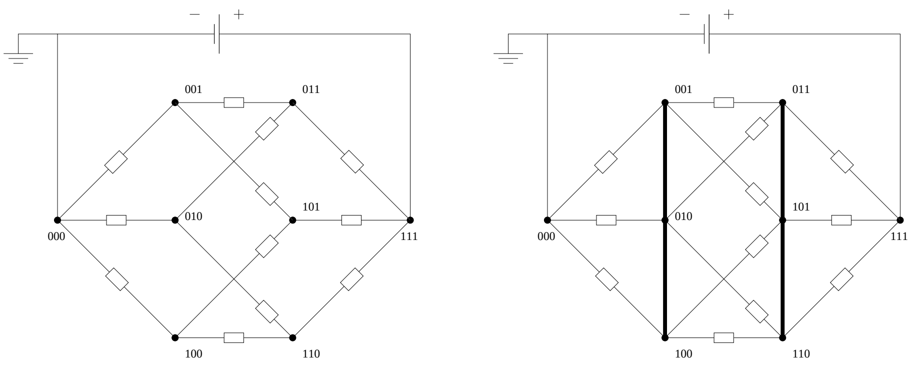
För ett exempel på det värdefulla i att betrakta slumpvandringen ur elektrisk synvinkel, betrakta den slumpvandring som startar i punkten 001 i kuben i Figur 3.



Figur 3: En kub.

Vad är sannolikheten att slumpvandringen når 111 före 000?

Motsvarande likströmskrets fås genom att lägga ettohmsmotstånd längs kanterna i kuben, koppla 000 till jord och 111 till +1 V. Vad blir då den elektriska potentialen i 001? Den listige elektrikern ritar om kuben enligt Figur 4(a).



Figur 4: (a) Likströmskretsen motsvarande slumpvandringen på kuben. (b) Samma krets, men med kortslutning mellan noderna 001, 010 och 101, samt mellan noderna 011, 101 och 110.

Av symmetriskäl är potentialen densamma i noderna 001, 010 och 100, och vi kan därför kortsluta dessa till varandra utan att påverka vad som händer i strömkretsen. Likadant kan vi göra med noderna 011, 101 och 110 (se Figur 4(b)).

Ersättningsresistansen mellan 000 och $\{001, 010, 100\}$ blir då (eftersom vi har 3 ettohmsmotstånd parallellt) $\frac{1}{3}$ Ω, liksom den mellan $\{011, 101, 110\}$ och 111. Mellan $\{001, 010, 100\}$ och $\{011, 101, 110\}$ fås ersättningsresistansen $\frac{1}{6}$ Ω. Potentialen i 001 är således

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}\text{ V}$$

och slumpvandringen som startar i 001 har därför sannolikheten $\frac{2}{5}$ att nå 111 före 000. Tack vare den elektriska analogin har vi alltså löst slumpvandringsproblemet utan att behöva befatta oss med något stort ekvationssystem i stil med (4)!

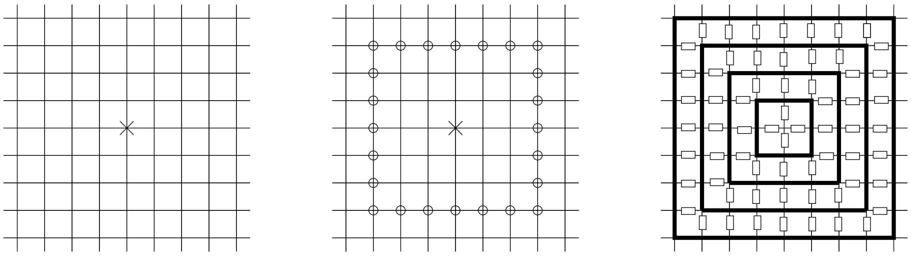
Ännu kraftfullare blir analogin mellan slumpvandringar och elektriska nät då vi endast önskar uppskatta en sannolikhet, snarare än att beräkna den exakt. Då har vi nämligen tillgång till en fysikalisk lag som (i ett specialfall) ser ut så här:

Rayleighs Monotonicitetslag: *Om man kortsluter två punkter i en likströmskrets, så minskar ersättningsresistansen mellan två godtyckligt valda andra punkter i kretsen. Om man i stället klipper av en ledning, så ökar ersättningsresistansen mellan två godtyckligt valda punkter.*

”Ökar” och ”minskar” skall här uppfattas som $\geq$ och $\leq$ snarare än $>$ och $<$. De flesta fysiker eller elektrotekniker skulle nog betrakta denna lag som ”självklar”, men för en matematiker är den något som måste bevisas. Det går att göra ett bevis på ett par sidor (se exempelvis [DS]), något som jag dock väljer att hoppa över här.

Betrakta nu en slumpvandring som startar från origo i det oändliga kvadratiska heltalsgittret (se Figur 5(a)). När slumpvandraren befinner sig i en nod (skärningspunkt) väljer han att gå att steg uppåt, nedåt, åt höger eller åt vänster, vardera med sannolikhet $\frac{1}{4}$.

En naturlig fråga är nu om man kan vara säker på att slumpvandraren (om han får hålla på oändligt länge) till slut återvänder till startpunkten (origo). För ett ändligt nätverk, som de båda vi studerat ovan, är svaret alltid ja, men för ett oändligt nätverk är frågan mer intrikat.



Figur 5. (a) En bit av heltalsgittret i två dimensioner. Startpunkten (origo) är markerad med ett kryss. (b) Punkterna i B_3 inringade. (c) Likströmskretsen där alla grannar kopplats ihop med ett ettohmsmotstånd, utom de som tillhör samma B_n vilka kortslutits till varandra.

För positiva heltal n, låt B_n beteckna mängden av punkter (x, y) i heltalsgittret sådana att $\max\{|x|, |y|\} = n$ (se Figur 5(b), där punkterna som ingår i B_3 är inringade). Låt P_n beteckna sannolikheten att en sådan slumpvandring som startar i origo når B_n innan den återvänder till origo. Sannolikheten att slumpvandringen över huvud taget når B_n är 1. Tänker man efter en stund kan man inse att påståendet "slumpvandraren återvänder säkert till slut till origo" därför är ekvivalent med påståendet "$\lim_{n\to\infty} P_n = 0$".

Låt R_n vara ersättningsresistansen mellan origo och B_n då vi har ett ettohmsmotstånd längs varje kant innanför B_n samtidigt som noderna som tillhör B_n är kortslutna till varandra. Man kan visa, som en följd av den elektrisk-probabilistiska analogin, att

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0 \quad \text{om och endast om} \quad \lim_{n\to\infty} R_n = \infty. \tag{5}$$

Rayleighs Monotonicitetslag medför att $R_n \geq R'_n$, där R'_n är ersättningsresistansen mellan origo och B_n om vi har lagt koppartrådar längs samtliga boxar B_i enligt Figur 5(c). Men R'_n är lätt att beräkna eftersom de $8i - 4$ ettohmsmotstånd som kopplar ihop B_{i-1} med B_i är parallellkopplade, och därför tillsammans har resistansen $\frac{1}{8i-4}$. Alltså fås

$$R'_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{8i-4}$$

så att

$$\lim_{n\to\infty} R_n \geq \lim_{n\to\infty} R'_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{8i-4} = \infty$$

(detta följer av det kända resultatet att den harmoniska serien är divergent, dvs att $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$). Tack vare (5) erhålles

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 0$$

vilket som sagt innebär att en slumpvandring på heltalsgittret i två dimensioner är dömd att förr eller senare återvända till startpunkten.

Vad händer då i tre dimensioner? Här är sannolikheten att slumpvandraren någonsin skall återvända till origo strikt mindre än 1 (den är i själva verket ≈ 0.341). Drastiskt uttryckt innebär detta att en berusad människa, som ju endast rör sig i två dimensioner, garanterat hittar hem till slut, medan en berusad fågel löper stor risk att tappa bort sig för alltid. Påståendet om tre dimensioner går att bevisa med elektriska argument och Rayleighs Monotonicitetslag; se den utmärkta monografin av Doyle och Snell [DS] för detta bevis och en hel del annat om detta fascinerande ämne. Det hela är i själva verket ett specialfall av en sats som säger att en slumpvandring i d dimensioner säkert hittar tillbaka för $d = 1$ och $d = 2$ men inte för $d \geq 3$, och som bevisades redan på 20-talet av George Pólya [P] med andra (kombinatoriska) metoder.

Referenser:

[DS] Doyle, P. & Snell, J.L., (1984) *Random Walks and Electric Networks*, Mathematical Monographs 22, Mathematical Association of America.

[GKZ] Grimmett, G., Kesten, H. & Zhang, Y. (1993) Random walk on the infinite cluster of the percolation model, *Probability Theory and Related Fields* **96**, 33–44.

[HM] Häggström, O. & Mossel, E. (1998) Nearest-neighbor walks with low predictability profile and percolation in $2 + \varepsilon$ dimensions, *Annals of Probability* **26**, 1212–1231.

[P] Pólya, G. (1921) Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz, *Mathematische Annalen* **84**, 149–160.