Tentamen i **SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER**, xxxsdagen den xx/x 1999, kl XX.XX-YY.YY i sal XX.

Lärare och examinator: Olle Häggström, ankn 5311.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Varje fullständigt korrekt löst uppgift ger 5 p, så att maxpoängen på hela tentan är 30 p. **För GU-studenter** krävs 15 p för godkänt och 22 p för VG. **För Chalmersstudenter** krävs 12 p för godkänt (betyg 3), 18 p för betyg 4, och 24 p för betyg 5.

□ □ □ □

1. Som du förhoppningsvis minns så byggde vi upp definitionen för väntevärden i tre steg genom att definiera det först för klassen $\mathcal{S}_+$ av enkla ickenegativa stokastiska variabler, sedan för klassen $\mathcal{M}_+$ av ickenegativa stokastiska variabler, och till sist för godtyckliga stokastiska variabler. Ge definitionen av $\mathbb{E}[X]$

(a) för $X \in \mathcal{S}_+$,

(b) för $X \in \mathcal{M}_+$,

(c) för godtyckliga X.

Visa sedan

(d) att om $X \in \mathcal{S}_+$ så ger definitionerna i (a) och (b) samma värde på $\mathbb{E}[X]$,

(e) att om $X \in \mathcal{M}_+$ så ger definitionerna i (b) och (c) samma värde på $\mathbb{E}[X]$.

2. Visa att om $X_1, X_2, \ldots$ är stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ som uppfyller

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} |X_k|\right] < \infty\,,$$

så gäller

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k]\,.$$

3. Låt X och Y vara diskreta stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Visa att X och Y är oberoende om och endast om

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

för alla $x, y \in \mathbb{R}^2$.

4. Borel–Cantellis första lemma säger (som bekant) att om $A_1, A_2, \ldots$ är händelser på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sådana att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \tag{1}$$

så gäller

$$\mathbb{P}(\text{högst ändligt många av händelserna } A_1, A_2, \ldots \text{ inträffar}) = 1\,. \tag{2}$$

Gäller omvändningen, dvs är det sant att (2) implicerar (1)? Ge bevis eller motexempel.

5. Bevisa, med hjälp av karaktäristiska funktioner, svaga stora talens lag för stokastiska variabler i L^1.

6. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sådana att $X_n \overset{n.s.}{\to} 0$ då $n \to \infty$. Visa att $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\cos(X_n)] = 1$.