Tentamen i **SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER**, fredagen den 12/3 1999, kl 14.15–19.15 i sal MG.

Lärare och examinator: Olle Häggström.

Jour: Jeff Steif, ankn 3513, *eller* Aila Särkkä, ankn 3542.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Varje fullständigt korrekt löst uppgift ger 5 p, så att maxpoängen på hela tentan är 30 p. **För GU-studenter** krävs 15 p för godkänt och 22 p för VG. **För Chalmersstudenter** krävs 12 p för godkänt (betyg 3), 18 p för betyg 4, och 24 p för betyg 5.

□ □ □ □

1. Visa att Borel-σ-algebran $\mathcal{B}$ är lika med σ(intervallen av typ $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$).

2. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara enkla ickenegativa stokastiska variabler på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Visa att om $X_n \downarrow 0$ punktvis, så gäller

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = 0\,. \qquad (*)$$

(b) Gäller $(*)$ även om vi släpper monotonicitetskravet (dvs om vi istället för $X_n \downarrow 0$ bara begär att $X_n \to X$ punktvis)? Ge bevis eller motexempel.

3. Låt X och Y vara stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Vad menas med den bivariata fördelningen μ för paret (X, Y)?

(b) Låt g vara en mätbar funktion från rummet $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B} \times \mathcal{B})$ till rummet $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, sådan att $g(X, Y)$ har ändligt väntevärde. Visa att

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,d\mu(x,y)\,.$$

4. Låt $X_1, X_2, \ldots$ och X vara stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sådana att $X_n \stackrel{\mathcal{P}}{\to} X$. Visa att det existerar en delsekvens som konvergerar mot X nästan säkert, dvs att det finns heltal $a_1, a_2, \ldots$ sådana att $X_{a_i} \stackrel{n.s.}{\to} X$ då $i \to \infty$.

5. Vad menas med att en stokastisk variabel är singulär? Ge också ett exempel på en singulär stokastisk variabel (och visa att den är singulär!).

6. Låt $Z_0, Z_1, \ldots$ vara stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Antag att de är oberoende och likformigt fördelade på $[0,1]$. För $k = 1, 2, \ldots$, låt

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{om } Z_k < Z_0 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Definiera också de succesiva medelvärdena

$$M_k = \frac{X_1 + \cdots + X_k}{k}.$$

(a) Vad händer med fördelningen för M_k då $k \to \infty$?

(b) Varför motsäger inte beteendet i (a) stora talens lag?