Tentamen i **SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER**, måndagen den 6/9 1999, kl 8.45–13.45 i sal TL1.

Lärare och examinator: Olle Häggström, ankn 5311.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Varje fullständigt korrekt löst uppgift ger 5 p, så att maxpoängen på hela tentan är 30 p. **För GU-studenter** krävs 15 p för godkänt och 22 p för VG. **För Chalmersstudenter** krävs 12 p för godkänt (betyg 3), 18 p för betyg 4, och 24 p för betyg 5.

□ □ □ □

1. Låt A_1, A_2, ... vara en växande följd av händelser (dvs $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots$) på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, och låt $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Bevisa att

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

2. Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara enkla ickenegativa stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Visa att om $X_n \downarrow 0$ punktvis, så gäller

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n] = 0\,. \qquad (*)$$

(b) Gäller $(*)$ även om vi släpper monotonicitetskravet (dvs om vi istället för $X_n \downarrow 0$ bara begär att $X_n \to 0$ punktvis)? Ge bevis eller motexempel.

3. En funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sägs vara **konvex** om det för varje $a \in \mathbb{R}$ existerar ett $\lambda \in \mathbb{R}$ sådant att $g(x) \geq g(a) + \lambda(x - a)$. **Jensens olikhet** säger då att om X är en stokastisk variabel med ändligt väntevärde, och g är en konvex funktion, så gäller

$$\mathbb{E}[g(x)] \geq g(\mathbb{E}[X])\,.$$

Bevisa denna olikhet!

4. Låt $X_1, X_2, \ldots$ och $Y_1, Y_2, \ldots$, samt X och Y, vara stokastiska variabler på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vilka av följande påståenden är sanna? (Ge bevis eller motexempel.)

(a) Om $X_n \overset{n.s.}{\to} X$, och $Y_n \overset{n.s.}{\to} Y$, så gäller även $X_n + Y_n \overset{n.s.}{\to} X + Y$.

(b) Om $X_n \overset{\mathcal{P}}{\to} X$, och $Y_n \overset{\mathcal{P}}{\to} Y$, så gäller även $X_n + Y_n \overset{\mathcal{P}}{\to} X + Y$.

(c) Om $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$, och $Y_n \overset{\mathcal{D}}{\to} Y$, så gäller även $X_n + Y_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X + Y$.

5. Formulera och bevisa Centrala gränsvärdessatsen!

6. Låt X_1, X_2, $\ldots$ vara en oändlig följd av oberoende likafördelade stokastiska variabler på ett sannolikhetsrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sådana att

$$\mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}\,.$$

Bestäm följande sannolikheter:

(a) $\mathbb{P}(A)$, där A är händelsen att gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ existerar.

(b) $\mathbb{P}(B)$, där B är händelsen att följden 1101 förekommer någonstans i följden $X_1, X_2, \ldots$, dvs att det existerar något $i \geq 1$ sådant att $X_i = 1$, $X_{i+1} = 1$, $X_{i+2} = 0$ och $X_{i+3} = 1$.

(c) $\mathbb{P}(Y \text{ är rationellt})$, där $Y = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} X_i$.