Tentamen i **SANNOLIKHETSTEORINS GRUNDER**, onsdagen den 7/4 1999, kl 8.45–13.45 i sal VV.

Lärare och examinator: Olle Häggström.

Jour: Olle Häggström, ankn 5311.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Varje fullständigt korrekt löst uppgift ger 5 p, så att maxpoängen på hela tentan är 30 p. **För GU-studenter** krävs 15 p för godkänt och 22 p för VG. **För Chalmersstudenter** krävs 12 p för godkänt (betyg 3), 18 p för betyg 4, och 24 p för betyg 5.

□ □ □ □

1. Låt $\mathcal{F}$ och $\mathcal{H}$ vara σ-algebror på ett utfallsrum Ω. Visa att $\mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ är en σ-algebra. Ge också ett motexempel som visar att $\mathcal{F} \cup \mathcal{H}$ inte behöver vara en σ-algebra.

2. Som du minns så definierade vi väntevärden i tre steg: först för klassen $\mathcal{S}_+$ av enkla ickenegativa stokastiska variabler, sedan för klassen $\mathcal{M}_+$ av ickenegativa stokastiska variabler, och till sist för godtyckliga stokastiska variabler. Formulera de två första stegen i denna definition, dvs

(a) definiera $\mathbb{E}[X]$ för $X \in \mathcal{S}_+$,

(b) definiera $\mathbb{E}[X]$ för $X \in \mathcal{M}_+$.

Bevisa sedan att

(c) om $X \in \mathcal{M}_+$ har uppräkneligt oändlig värdemängd $\{x_1, x_2, \ldots\}$, så är

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k) .$$

3. Visa att L^p-normen $\|X\|_p$ för en godtycklig stokastisk variabel X är växande i p för $p \geq 1$.

4. Låt $X_1, X_2, \dots$ och X vara stokastiska variabler på $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Vilken eller vilka av följande båda implikationer gäller? (Ge bevis eller motexempel.)

(a) Om $X_n \stackrel{n.s.}{\to} X$, så $X_n \stackrel{\mathcal{P}}{\to} X$.

(b) Om $X_n \stackrel{\mathcal{P}}{\to} X$, så $X_n \stackrel{n.s.}{\to} X$.

5. En av varianterna av Stora talens lag säger att om $X_1, X_2, \dots$ är oberoende och likafördelade stokastiska variabler med ändligt väntevärde μ och ändlig varians σ^2, så gäller för de successiva medelvärdena

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

att

$$M_n \stackrel{\mathcal{P}}{\to} \mu \,.$$

Ge ett motexempel som visar att man inte kan stryka oberoendeantagandet i denna sats.

6. Formulera och bevisa Centrala gränsvärdessatsen.