Sannolikhetsteori på tvåvåningsgrafer

Olle Häggström*

1 Inledning

En graf $G = (V, E)$ består av en mängd V av noder tillsammans med en mängd E av kanter, där varje kant $e \in E$ förbinder två av noderna. Om en kant e förbinder noderna u och v skriver vi $e = \langle u, v \rangle$, och vi säger att u och v är grannar i grafen.

Ett stort och viktigt område inom sannolikhetsteorin idag är studiet av stokastiska modeller på grafer, och speciellt hur grafens egenskaper återspeglas i modellernas beteenden; se exempelvis Aldous [1], Woess [16], Häggström [10], Lyons [14], och Lyons & Peres [15]. Graferna kan vara ändliga eller (uppräkneligt) oändliga, man här skall vi för enkelhets skull koncentrera oss på ändliga grafer.

Vi skall vidare specialisera oss på så kallade **tvåvåningsgrafer**. Givet en graf $G = (V, E)$ kan vi definiera en motsvarande tvåvåningsgraf $G_2 = (V_2, E_2)$ på följande vis. Om vi tänker oss G ritad i x-y-planet så kan vi också tänka oss en exakt kopia av G rakt ovanför (i z-led), och att varje nod i kopian förbinds via en vertikal kant med motsvarande nod i den ursprungliga grafen. Den därvid erhållna grafen är vår tvåvåningsgraf G_2; se Figur 1. En mer stringent sätt att säga detta är att $G_2 = (V_2, E_2)$ erhålles genom att låta

$$V_2 = V \times \{0, 1\}$$

och

$$E_2 = \{\langle (u,i), (v,i) \rangle : \langle u, v \rangle \in E, i \in \{0,1\}\} \cup \{\langle (u,0), (u,1) \rangle : u \in V\}.$$

Betrakta nu två noder $(u, 0)$ och $(v, 0)$ på ”nedre våningen” i G_2, tillsammans med den nod $(v, 1)$ som ligger rakt ovanför $(v, 0)$. Har noden $(u, 0)$ ”närmare” till $(v, 0)$ än till $(v, 1)$? Om vi vill gå från en nod till en annan längs en följd av kanter i grafen, och mäter ”närhet” i längden (uttryckt i antal kanter) av kortaste vägen[1] mellan två noder, så är svaret ja: kortaste väg från $(u, 0)$ till $(v, 0)$ är ett steg kortare än kortaste väg från $(u, 0)$ till $(v, 1)$. Man kan tänka sig andra definitioner av ”närhet”, men det ligger nära till hands att tänka sig att varje rimlig (vad det nu betyder!) sådan definition bör leda till att $(u, 0)$ och $(v, 0)$ ligger närmare varandra än $(u, 0)$ och $(v, 1)$ gör.

I sannolikhetsteori på tvåvåningsgrafer frågar vi oss hur detta förhållande manifesteras i stokastiska modeller på G_2. Man kan vänta sig att sådana modeller uppvisar starkare korrelation eller andra samband, mellan noderna $(u, 0)$ och $(v, 0)$ jämfört med mellan $(u, 0)$ och $(v, 1)$. Om vi kan bevisa sådana saker för tvåvåningsgrafer kan detta förhoppningsvis i förlängningen leda till en ökad förståelse för vilken betydelse närhet mellan noder har för stokastiska modeller på mer allmänna grafer.

*Matematisk statistik, Chalmers tekniska högskola, http://www.math.chalmers.se/~olleh/

[1] Vi antar här att G (och därmed G_2) är sammanhängande, så att en sådan väg alltid finns.

I nästa avsnitt skall vi gå igenom tre av de vanligaste och viktigaste stokastiska modellerna på grafer – slumpvandring, perkolation och Isingmodellen – och speciellt diskutera hur dessa beter sig på tvåvåningsgrafer. Ett nytt resultat (Sats 2.4) om Isingmodellen på tvåvåningsgrafer presenteras i slutet av avsnittet. Därefter, i Avsnitt 3, går vi i detalj in på det intima sambandet mellan Isingmodellen och en viss beroende perkolationsmodell kallad FK-modellen. Detta samband utnyttjas sedan i Avsnitt 4 för att ge ett bevis av Sats 2.4. Slutligen, i Avsnitt 5, säger vi något om generaliseringar.

2 Några stokastiska modeller på grafer

2.1 Slumpvandring

Med en slumpvandring på en graf $G = (V, E)$ menar vi en viss typ av stokastisk process $(X(0), X(1), X(2), \ldots)$, där $X(n) \in V$ för varje n. Uttrycket $X(n) = v$ tolkar vi som att en förvirrad vandrare på G vid tidpunkten n befinner sig i noden v. Om v har exakt d grannar, $w_1, \ldots, w_d$, så fås $X(n+1)$ genom att välja en av grannarna $w_1, \ldots, w_d$ på måfå (med sannolikhet $1/d$ vardera).

Några grundläggande frågeställningar för slumpvandringar på grafer är följande. Givet ett startvärde $X(0) = u$ och en tidpunkt n, vad är fördelningen för $X(n)$? Konvergerar den mot någon gränsfördelning då $n \to \infty$? Har startnoden någon betydelse för den gränsfördelning vi i så fall får? Hur lång tid tar det för processen att närma sig gränsfördelningen? Se t.ex. Häggström [12] för en elementär introduktion till dylika problem.

En annan klass av problem berör träffsannolikheter. Givet start i $X(0) = u$, vad är sannolikheten att slumpvandringen träffar noden v innan den träffar noden w? Med andra ord, om vi låter $T_v = \min\{n : X(n) = v\}$ och $T_w = \min\{n : X(n) = w\}$, och $\mathbf{P}$ (i vanlig ordning) betecknar sannolikhet, är vi intresserade av

$$\mathbf{P}(T_v < T_w)\,.$$

Det har visat sig att en analogi mellan slumpvandringar och likströmskretsar utgör ett kraftfullt redskap för att behandla sådana problem, då den tillåter Ohms och Kirchoffs lagar att komma till användning i analysen av slumpvandringar, se t.ex. Doyle & Snell [3] eller Häggström [11]. För tvåvåningsgrafer utnyttjade Bollobás & Brightwell [2] denna teknik till att visa att en slumpvandringing som startar i $(u, 0)$ uppfyller

$$\mathbf{P}(T_{(v,0)} < T_{(v,1)}) \geq \frac{1}{2}$$

vilket bekräftar den allmänna intuitionen att $(u, 0)$ har närmare till $(v, 0)$ än till $(v, 1)$.

En liknande fråga är huruvida vi för varje fix tidpunkt n har (åter med $X(0) = (u, 0)$) sambandet

$$\mathbf{P}(T_{(v,0)} \leq n) \geq \mathbf{P}(T_{(v,1)} \leq n)\,. \tag{1}$$

Något överrakande visar det sig att detta inte alltid är sant, se Figur 2 för ett motexempel som Bollobás och Brightwell fann. De uttryckte däremot en förmodan om att en motsvarighet till (1) gäller om slumpvandringen definieras i kontinuerlig tid (vilket kan göras på ett naturligt sätt) istället för i diskret tid. Denna förmodan bevisades sedan av Häggström [9].

2.2 Perkolation

I (kant-)perkolation på en graf $G = (V, E)$ fixerar man en parameter $p \in [0, 1]$, och låter $\{X(e)\}_{e \in E}$ vara oberoende och likafördelade $\{0, 1\}$-värda stokastiska variabler med

$$\mathbf{P}(X(e) = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(X(e) = 0) . \tag{2}$$

Om vi nu tänker oss att vi kastar bort alla kanter e som har $X(e) = 0$, får vi en stokastisk delgraf av G. (Värdena 1 och 0 hos en kant skall alltså tolkas som "på" respektive "av".) I perkolationsteori studerar man konnektivitetsegenskaper hos denna delgraf. Det vanligaste är att man låter den ursprungliga grafen vara antingen en komplett graf eller ett regelbundet gitter i 2 eller flera dimensioner; se Janson et al. [13] respektive Grimmett [8] för grundliga genomgångar av teorin i dessa båda fall. I fallet med den kompletta grafen handlar den mesta av teorin om asymptotiken då antalet noder i den kompletta grafen går mot ∞, medan gittermodellerna oftast antas oändliga från början. I båda fallen uppvisar perkolationsmodellen ett mycket intressant tröskelfenomen: sannolikheten att få en mycket stor sammanhängande komponent (dvs en komponent av samma storleksordning som den ursprungliga grafen) är 0 eller 1 beroende på om p är under eller över ett visst kritiskt värde.

Låt oss använda beteckningen $\{0, 1\}^E$ för mängden av avbildningar från E till $\{0, 1\}$. Varje $\xi \in \{0, 1\}^E$ specificerar alltså att vissa kanter (de med $\xi(e) = 0$) kastas bort, medan andra (de med $\xi(e) = 1$) sparas. Vidare låter vi ϕ_p^G beteckna det sannolikhetsmått på $\{0, 1\}^E$ som svarar mot att kanterna tilldelas värde 0 eller 1 enligt (2), oberoende av varandra. Med den stokastiska kantkonfigurationen $X \in \{0, 1\}^E$ vald enligt ovan, får vi alltså

$$\phi_p^G(\xi) = \mathbf{P}(X = \xi)$$

för varje $\xi \in \{0, 1\}^E$.

För två noder $u, v \in V$ skriver vi $u \overset{X}{\longleftrightarrow} v$ för händelsen att det finns en väg av kanter mellan u och v i den slumpmässiga delgraf av G som svarar mot X. Följande förmodan angående perkolation på tvåvåningsgrafer ligger i linje med vår allmänna intuition för stokastiska modeller på sådana grafer.

Förmodan 2.1 *Låt $G = (V, E)$ vara en graf, och låt $G_2 = (V_2, E_2)$ vara motsvarande tvåvåningsgraf. Låt $p \in [0, 1]$, och välj en stokastisk kantkonfiguration $X \in \{0, 1\}^{E_2}$ enligt sannolikhetsmåttet $\phi_p^{G_2}$ för perkolation på G_2 med parameter p. Då gäller, för varje $u, v \in V$, att*

$$\mathbf{P}((u, 0) \overset{X}{\longleftrightarrow} (v, 0)) \geq \mathbf{P}((u, 0) \overset{X}{\longleftrightarrow} (v, 1)) . \tag{3}$$

Jag har känt till denna obevisade förmodan sedan mitten av 90-talet, men har inte lyckats utröna dess ursprung.

Vad vi hittills diskuterat är den mest grundläggande perkolationsmodellen med oberoende mellan olika kanter. I litteraturen finns också en rad olika beroende perkolationsmodeller. Den kanske viktigaste (eller åtminstone mest uppmärksammade) modellen av detta slag är den så kallade FK-modellen[2], som definieras som följer.

[2] Trots modellens popularitet i den internationella matematiska litteraturen är detta möjligen första gången den behandlas i skrift på svenska. På engelska kallas den omväxlande för *the FK-model* (efter dess uppfinnare/upptäckare Fortuin & Kasteleyn [5]) och *the random-cluster model*. Även om jag i allmänhet föredrar deskriptiva namn på matematiska objekt framför personnamn väljer jag alltså här personnamnsvarianten, eftersom *random-cluster model* varken är någon särskilt träffande benämning eller låter vidare elegant vid en direktöversättning till svenska.

Definition 2.2 *Givet en graf* $G = (V, E)$ *och* $\xi \in \{0,1\}^E$*, definiera* $k(\xi)$ *som antalet sammanhängande komponenter (inklusive isolerade noder) i den delgraf av* G *som motsvarar* ξ*. För* $p \in [0,1]$ *och* $q > 0$ *definieras* **FK-måttet** $\phi^G_{p,q}$ *som det mått på* $\{0,1\}^E$ *som till varje* $\xi \in \{0,1\}^E$ *tilldelar sannolikhet*

$$\phi^G_{p,q}(\xi) = \frac{q^{k(\xi)}}{Z^G_{p,q}} \prod_{e \in E} p^{\xi(e)}(1-p)^{1-\xi(e)} .$$

Här är $Z^G_{p,q} = \sum_{\eta \in \{0,1\}^E} q^{k(\xi)} \prod_{e \in E} p^{\eta(e)}(1-p)^{1-\eta(e)}$ *en normaliseringskonstant som gör* $\phi^G_{p,q}$ *till ett sannolikhetsmått.*

Notera att $q = 1$ ger vanlig perkolation, dvs oberoende mellan kanter. FK-modellen är alltså en generalisering av vanlig perkolation. Främsta skälet till att just denna generalisering av rönt så mycket uppmärksamhet är att fallet $q = 2$ är intimt förknippat med (och mycket användbart i studiet av) Isingmodellen – som vi skall se i Avsnitt 3 – och att fallen $q \in \{3, 4, \dots\}$ har motsvarande samband med den så kallade Pottsmodellen. Se Georgii et al. [7] för en grundlig diskussion om FK-modellen och om dessa samband.

Vad gäller FK-modellen för tvåvåningsgrafer är det rimligt att tänka sig att sambandet (3) bör gälla även då X väljs enligt FK-måttet $\phi^{G_2}_{p,q}$. Dock kan det verka som att detta för $q \neq 1$ (som ju leder till intrikata beroenden mellan kanterna) skulle vara betydligt svårare att bevisa än fallet $q = 1$. I ljuset av detta kan det synas förvånande att vi – se Korollarium 4.1 nedan – kan bevisa (3) för specialfallet $q = 2$ (men alltså inte för $q = 1$). Förklaringen till detta står att finna i det samband mellan FK-modellen med $q = 2$ och Isingmodellen som vi skall diskutera i Avsnitt 3.

2.3 Isingmodellen

Isingmodellen är ett sätt att tilldela värdena -1 och $+1$ till noderna i en graf $G = (V, E)$ på ett korrelerat sätt. Den klassiska fysikaliska tolkningen då G är t.ex. ett tredimensionellt gitter, är att noderna är atomer i ett ferromagnetiskt material, och att -1 och $+1$ är två motsatta spin-riktningar hos atomerna.

Definition 2.3 *För* $\beta \geq 0$ *och en graf* $G = (V, E)$ *definierar vi* **Isingmåttet** μ^G_β *som det mått på* $\{-1,+1\}^V$ *som till varje konfiguration* $\xi \in \{-1,+1\}^V$ *tilldelar sannolikhet*

$$\mu^G_\beta(\xi) = \frac{1}{\tilde{Z}^G_\beta} \exp\left(\beta \sum_{\langle x,y \rangle \in E} \xi(x)\xi(y)\right) , \tag{4}$$

där $\tilde{Z}^G_\beta = \sum_{\eta \in \{-1,+1\}^V} \exp(\beta \sum_{\langle x,y \rangle \in E} \eta(x)\eta(y))$ *är en normaliseringskonstant.*

Om vi börjar med att betrakta fallet $\beta = 0$ ser vi att exponenten i (4) försvinner, så att alla konfigurationer blir lika sannolika, vilket i sin tur innebär att spinvärdena i olika noder blir oberoende och likafördelade, med sannolikhet $\frac{1}{2}$ vardera för värdena -1 och $+1$. När $\beta > 0$ gäller det fortfarande (pga modellens ± 1-symmetri) i varje nod att värdena -1 och $+1$ är lika sannolika. Däremot uppstår ett beorende mellan noder tack vare att konfigurationer $\xi \in \{-1,+1\}^V$ med gott om samförstånd mellan grann-noder får högre sannolikhet i (4) jämfört med konfigurationer där många grannpar antar olika spinvärden. I extremfallet då $\beta \to \infty$ kommer med sannolikhet 1 alla par av grann-noder att anta samma värde, vilket (om grafen är sammanhängande) innebär att *alla* noder kommer att anta samma värde.

Den definierande formeln (4) kan (för den som inte sett den tidigare) tyckas en aning godtycklig, men till dess försvar kan följande anföras: De mest grundläggande sannolikhetsmåtten på $\{-1,+1\}^V$ är de som gör nodernas spin oberoende, och dessa är precis produktmåtten π på samma rum. Men en produkt är exponentieringen av en summa, och kan alltså skrivas på formen $\pi(\xi) = \frac{1}{Z}\exp\left(\sum_{x\in V} f_x(\xi(x)\right)$. Om vi nu vill generalisera oberoendet till parvis interaktion mellan grannar är det natuligt att tillåta termer som beror inte bara av en nod utan av ett par av grannar, i den exponentierade summan. Det är detta vi gör i (4) på enklast möjliga sätt för att "belöna" likhet mellan grann-noder. Notera att även om den direkta interaktionen endast äger rum mellan grannar i grafen, så uppstår ändå beroenden mellan noder på längre avstånd från varandra.

Oftast (se t.ex. [7]) låter man G vara ett kvadratiskt eller kubiskt gitter i två respektive tre dimensioner. Då inträffar ett mycket intressant tröskelfenomen, besläktat med det som uppträder i perkolationsmodeller. Det visar sig att det finns ett kritiskt värde β_c (som beror på dimensionen) med följande egenskap: Om man tar $\beta < \beta_c$, och låter gitterstorleken gå mot oändligheten, så kommer andelen noder med värde $+1$ att gå mot $\frac{1}{2}$ – interaktionen är alltså tillräckligt svag för att en sorts Stora Talens Lag skall gälla. Om däremot $\beta > \beta_c$ och gittret är mycket stort, kommer andelen $+1$-noder likväl *inte* att hamna nära $\frac{1}{2}$, utan istället nära $\frac{1}{2} - a$ eller $\frac{1}{2} + a$ (med lika sannolikhet), där $a \in (0, \frac{1}{2})$ är en konstant som beror på β. Detta kan uttryckas som att modellens inneboende ± 1-symmetri återspeglas (med sannolikhet nära 1) i den enskilda realiseringen för $\beta < \beta_c$ men inte för $\beta > \beta_c$. Detta **fasövergångsfenomen** är främsta anledningen till att Isingmodellen tilldrar sig stort intresse i sannolikhetsteori och statistisk fysik.

En annan intressant egenskap hos Isingmodellen är att om spinkonfigurationen $Y \in \{-1,+1\}^V$ väljs enligt Isingmåttet μ_β^G, så blir $Y(u)$ och $Y(v)$ positivt korrelerade för alla $u, v \in V$. Eftersom båda variablerna (pga ± 1-symmetrin) har väntevärde 0 blir detta samma sak som att påstå att

$$\mathbf{E}[Y(u)Y(v)] \geq 0 \tag{5}$$

där $\mathbf{E}$ alltså betecknar väntevärde. Detta är ett känt resultat av Fortuin et al. [6], och vi skall se ett enkelt bevis i nästa avsnitt, Korollarium 3.3. Det är rimligt att tänka sig att noder i allmänhet bör bli starkare korrelerade ju närmare varandra i grafen de ligger. För tvåvåningsgrafer har vi lyckats visa följande.

Sats 2.4 *Låt $G = (V, E)$ vara en graf och $G_2 = (V_2, E_2)$ motsvarande tvåvåningsgraf. Fixera $\beta \geq 0$, och välj $Y \in \{-1, 1\}^{V_2}$ enligt Isingmåttet $\mu_\beta^{G_2}$. Då gäller, för alla $u, v \in V$, att*

$$\mathbf{E}[Y((u,0))Y((v,0))] \geq \mathbf{E}[Y((u,0))Y((v,1))].$$

Notera att detta är helt i linje med vad vi allmänt förväntar oss av tvåvåningsgrafer. Vi skall skissa beviset i Avsnitt 4.

3 Sambandet mellan FK- och Isingmodellen

Att ett nära samaband mellan Ising- och FK-modellerna föreligger insåg redan Fortuin & Kasteleyn [5]. Enklast kan sambandet förstås av följande explicita koppling, först presenterad av Edwards & Sokal [4].

Sats 3.1 *Fixera $p \in (0,1)$, låt $G = (V,E)$ vara en graf, och välj $X \in \{0,1\}^E$ enligt FK-måttet $\phi^G_{p,2}$. Välj sedan $Y \in \{-1,1\}^V$ på följande vis. På varje sammanhängande komponent i den delgraf till G som svarar mot kantkonfigurationen X, låt alla noder anta ett och samma värde. Låt detta värde vara -1 eller $+1$ med sannolikhet $\frac{1}{2}$, och välj det oberoende för olika komponenter. Då blir Y fördelad enligt Isingmåttet μ^G_β, med $\beta = -\frac{1}{2}\log(1-p)$.*

Vi skall ge beviset av detta i specialfallet $p = \frac{1}{2}$, och lämnar generaliseringen till godtyckligt p som en övning åt den intresserade läsaren. (Alternativt går det bra att konsultera t.ex. [7].)

Bevis av Sats 3.1 i fallet $p = \frac{1}{2}$: Låt $\xi \in \{0,1\}^E$ och $\eta \in \{-1,+1\}^V$ vara godtyckliga kant- och spinkonfigurationer som är möjliga att få genom proceduren i Sats 3.1. Med detta menas att $\eta(u) = \eta(v)$ för varje kant $e = \langle u, v\rangle$ sådan att $\xi(e) = 1$. För ett sådant par (ξ, η) får vi, med $p = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=\xi, Y=\eta) &= \mathbf{P}(X=\xi)\mathbf{P}(Y=\eta \mid X=\xi) \;=\; \phi^G_{p,2}(\xi)2^{-k(\xi)} \\
&= \frac{2^{k(\xi)}}{Z^G_{p,2}}\left(\prod_{e\in E} p^{\xi(e)}(1-p)^{1-\xi(e)}\right)2^{-k(\xi)} \;=\; \frac{1}{Z^G_{p,2}2^{|E|}}
\end{aligned}$$

där $|E|$ betecknar kardinaliteten hos E. Alla sådana par (ξ, η) är alltså lika sannolika. Om vi för $\eta \in \{-1,+1\}^V$ låter $n(\eta)$ beteckna antalet kanter $e = \langle u, v\rangle \in E$ sådana att $Y(u) = Y(v)$, så finns $2^{n(\eta)}$ olika kantkonfigurationer ξ som är kompatibla med η, och vi får

$$\mathbf{P}(Y=\eta) = \frac{2^{n(\eta)}}{Z^G_{p,2}2^{|E|}}\,.$$

Låt $\beta = -\frac{1}{2}\log(1-p) = \frac{1}{2}\log 2$. Av Definition 2.3 får vi

$$\begin{aligned}
\mu^G_\beta(\eta) &= \frac{1}{\tilde{Z}^G_\beta}\exp\left(\beta(n(\eta) - (|E| - n(\eta)))\right) \\
&= \frac{1}{\tilde{Z}^G_\beta}\exp\left(\left(\tfrac{\log 2}{2}\right)(2n(\eta) - |E|)\right) \\
&= \frac{1}{\tilde{Z}^G_\beta}2^{n(\eta)-|E|/2}
\end{aligned}$$

så att

$$\frac{\mathbf{P}(Y=\eta)}{\mu^G_\beta(\eta)} = \frac{2^{n(\eta)}}{Z^G_{p,2}2^{|E|}} \times \frac{\tilde{Z}^G_\beta}{2^{n(\eta)-|E|/2}} = \frac{\tilde{Z}^G_\beta}{Z^G_{p,2}2^{|E|/2}}$$

vilket inte beror på η. Fördelningen för Y är alltså proportionell mot μ^G_β, och eftersom båda fördelningarna summerar sig till 1 måste de vara identiska. $\square$

En användbar konsekvens av Sats 3.1 är följande.

Korollarium 3.2 *Låt $G = (V,E)$ vara en graf, fixera $\beta \geq 0$, och välj $Y \in \{-1,1\}^V$ enligt Isingmåttet μ^G_β. Välj också $X \in \{0,1\}^E$ enligt $\phi^G_{p,2}$ med $p = 1 - e^{-2\beta}$. Då gäller för godtyckliga $u, v \in V$ att*

$$\mathbf{E}[Y(u)Y(v)] = \mathbf{P}(u \stackrel{X}{\longleftrightarrow} v)\,. \tag{6}$$

Bevis: Vi kan anta att Y erhållits som i Sats 3.1. I så fall implicerar händelsen $(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v)$ att $Y(u)Y(v) = 1$. Betingat med komplementhändelsen $\neg(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v)$ har vi att $Y(u)Y(v)$ är -1 eller $+1$ med sannolikhet $\frac{1}{2}$ vardera. Alltså fås

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[Y(u)Y(v)] \\
&= \mathbf{P}(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v)\mathbf{E}[Y(u)Y(v) \mid (u \overset{X}{\longleftrightarrow} v)] + \mathbf{P}(\neg(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v))\mathbf{E}[Y(u)Y(v) \mid \neg(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v)] \\
&= 1 \cdot \mathbf{P}(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v) + 0 \cdot \mathbf{P}(\neg(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v)) \;=\; \mathbf{P}(u \overset{X}{\longleftrightarrow} v)\,.
\end{aligned}$$

□

Som en tillämpning på detta erhålles ett enkelt bevis av den kända korrelationsolikheten (5):

Korollarium 3.3 *Låt $G = (V, E)$ vara en graf, låt $\beta \geq 0$, och välj $Y \in \{-1, 1\}^V$ enligt Isingmåttet μ_β^G. Då gäller för alla $u, v \in V$ att*

$$\mathbf{E}[Y(u)Y(v)] \geq 0\,.$$

Bevis: Följer omedelbart av Korollarium 3.2, eftersom högerledet i (6) är en sannolikhet. □

4 Bevis av den nya olikheten för Isingmodellen

I detta avsnitt skissar vi beviset av Sats 2.4, och avslutar sedan med en enkel följdsats för FK-modellen.

Bevis av Sats 2.4 (skiss): Vi vill visa att

$$\mathbf{E}[Y((u,0))(Y((v,0)) - Y((v,1)))] \geq 0\,.$$

Av uppenbara symmetriskäl har vi att

$$\mathbf{E}[Y((u,1))(Y((v,1)) - Y((v,0)))] = \mathbf{E}[Y((u,0))(Y((v,0)) - Y((v,1)))]$$

så att

$$\mathbf{E}[(Y((u,0)) - Y((u,1)))(Y((v,0)) - Y((v,1)))] = 2\mathbf{E}[Y((u,0))(Y((v,0)) - Y((v,1)))]$$

och vi är därför klara om vi kan visa att

$$\mathbf{E}[(Y((u,0)) - Y((u,1)))(Y((v,0)) - Y((v,1)))] \geq 0\,. \tag{7}$$

Givet $Y \in \{-1, +1\}^{V_2}$, definiera $W \in \{-1, 0, +1\}^V$ genom att låta $W(w) = \frac{1}{2}(Y((w,0)) - Y((w,1)))$ för varje $w \in V$. Definiera också $G_Y = (V_Y, E_Y)$ som (den stokastiska) grafen med nodmängd $V_Y = \{w \in V : W(w) \in \{-1, +1\}\}$ och kantmängd $E_Y = \{e = \langle w, z\rangle \in E : w, z \in V_Y\}$. Notera att G_Y alltså innehåller de noder i G som i Y får olika värden på olika våningar.

Betrakta nu betingade fördelningen för $W(V_Y)$ givet G_Y och $\{Y(w, i) : w \notin V_Y, i \in \{0, 1\}\}$. Det är lätt att inse att de mest sannolika konfigurationerna på $\{-1, +1\}^{V_Y}$ under dessa betingelser är de med enighet längs samtliga kanter i G_Y, dvs de där vi för varje $e = \langle x, y\rangle \in E_Y$ har $W(x) = W(y)$. Detta minimerar nämligen (givet G_Y

och $\{Y(w,i) : w \notin V_Y, i \in \{0,1\}\})$ antalet "missnöjda" kanter i G_2, dva antalet kanter $e = \langle x,y \rangle \in E_2$ med $Y(x) \neq Y(y)$. Vidare ser vi att för varje kant i E_Y som får olika värden hos sina ändnoder i W, så ökar antalet "missnöjda" kanter i G_2 med exakt 2 (en på varje våning!). Härav följer att den efterfrågade betingade fördelningen för $W(V_Y)$ ges av Isingmåttet för G_Y med parameter 2β. Korollarium 3.3 ger därför att

$$\mathbf{E}[W(x)W(y) \,|\, G_Y, \{Y(w,i) : w \notin V_Y, i \in \{0,1\}\}] \geq 0 \tag{8}$$

om $x,y \in V_Y$. Om å andra sidan någon av noderna x och y *inte* tillhör V_Y, så blir vänsterledet i (8) trivialt lika med 0. Alltså gäller (8) för alla $x,y \in V$ och alla utfall av G_Y och $\{Y(w,i) : w \notin V_Y, i \in \{0,1\}\}$. Således kan vi konkludera att det obetingade väntevärdet också är positivt, dvs att

$$\mathbf{E}[W(x)W(y)] \geq 0$$

för alla $x,y \in V$. Med stöd av hur vi definierade W erhålles därför

$$\mathbf{E}[(Y((u,0)) - Y((u,1)))(Y((v,0)) - Y((v,1)))] = 4\mathbf{E}[W(x)W(y)] \geq 0\,,$$

och (7) är bevisad, vilket var vad som krävdes. □

Följande resultat för FK-modellen får vi som en omedelbar konsekvens av Sats 2.4 i kombination med Korollarium 3.2.

Korollarium 4.1 *Låt $G = (V,E)$ vara en graf, och $G_2 = (V_2,E_2)$ vara motsvarande tvåvåningsgraf. Låt $p \in [0,1]$, och välj en stokastisk kantkonfiguration $X \in \{0,1\}^{E_2}$ enligt FK-måttet $\phi_{p,2}^{G_2}$. Då gäller, för varje $u,v \in V$, att*

$$\mathbf{P}((u,0) \overset{X}{\longleftrightarrow} (v,0)) \geq \mathbf{P}((u,0) \overset{X}{\longleftrightarrow} (v,1))\,.$$

5 En avslutande kommentar om generaliseringar

I Avsnitt 1 nämndes förhoppningen att ett nära studium av stokastiska modeller på tvåvåningsgrafer så småningom skall kunna leda till nya insikter även om andra grafer. För att visa att detta inte är något alldeles lätt projekt skall jag nu ge exempel på en något naiv förhoppning om generalisering, och visa varför det inte fungerar.

Jag har talat om "närhet" i grafer med avsiktlig luddighet, och hävdat att i tvåvåningsgrafer så har $(u,0)$ närmare till $(v,0)$ än till $(v,1)$. Vad vore mer naturligt än att göra närhetsbegreppet mer precist genom att för en godtycklig sammanhängande graf $G = (V,E)$ och två noder $u,v \in V$ definiera avståndet $d(u,v)$ som det minsta antalet kanter i G som man behöver för att gå från u till v? Sedan skulle man för varje resultat och förmodan som vi har formulerat för tvåvåningsgrafer kunna formulera en gereralisering för godtyckliga grafer, på formen "om $d(u,v) \leq d(u,w)$, så gäller...".

Detta stöter på patrull redan för ganska enkla exempel. Betrakta grafen G i Figur 3. Vi har $d(u,v) = 1$ och $d(u,w) = 2$. Likväl har en slumpvandring som startar i u i någon mening "närmare" till w än till v, ty

$$\mathbf{P}(T_v < T_w) = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

vilket lätt kan verifieras. Om vi betraktar perkolation på G framstår situationen som än mer komplicerad: med kantsannolikhet $p = \frac{1}{2}$ får vi

$$\mathbf{P}(u \leftrightarrow v) = \frac{1}{2} < \frac{37}{64} = \mathbf{P}(u \leftrightarrow w)$$

medan $p = \frac{1}{3}$ ger det omvända förhållandet

$$\mathbf{P}(u \leftrightarrow v) = \frac{1}{3} > \frac{217}{729} = \mathbf{P}(u \leftrightarrow w)\,.$$

Att sådana saker kan ske i G förklaras naturligtvis av att det större avståndet mellan u och w kompenseras av det större antalet olika relativt korta vägar. Finns det något användbart sätt att kvantifiera detta?

References

[1] Aldous, D. (1991) Applications of random walks on finite graphs, *Selected Proceedings of the Sheffield Symposium on Applied Probability* (ed. I. Basawa and R. Taylor), 12–26, IMS, Hayward, California.

[2] Bollobás, B. & Brightwell, G. (1997) Random walks and electrical resistances in products of graphs, *Discrete Applied Mathematics* **73**, 69–79.

[3] Doyle, P. & Snell, J.L. (1984) *Random Walks and Electric Networks*, Mathematical Monograph **22**, Mathematical Association of America.

[4] Edwards, R.G. & Sokal, A.D. (1988) Generalization of the Fortuin–Kasteleyn–Swendsen–Wang representation and Monte Carlo algorithm, *Physical Review D* **38** 2009–2012.

[5] Fortuin, C.M. & Kasteleyn, P.W. (1972) On the random-cluster model. I. Introduction and relation to other models, *Physica* **57**, 536–564.

[6] Fortuin, C.M., Kasteleyn, P.W. & Ginibre, J. (1971) Correlation inequalities on some partially ordered sets, *Communications in Mathematical Physics* **22**, 89–103.

[7] Georgii, H.-O., Häggström, O. & Maes, C. (2001) The random geometry of equilibrium phases, *Phase Transitions and Critical Phenomena, Volume 18* (C. Domb and J.L. Lebowitz, eds), pp 1–142, Academic Press, London.

[8] Grimmett, G.R. (1999) *Percolation* (2nd edition), Springer, New York.

[9] Häggström, O. (1998) On a conjecture of Bollobás and Brightwell concerning random walks on product graphs, *Combinatorics, Probability and Computing* **7**, 397–401.

[10] Häggström, O. (2000) Markov random fields and percolation on general graphs, *Advances in Applied Probability* **32**, 39–66.

[11] Häggström, O. (2000) Slumpvandringar och likströmskretsar, *Elementa* **83**, 10–14.

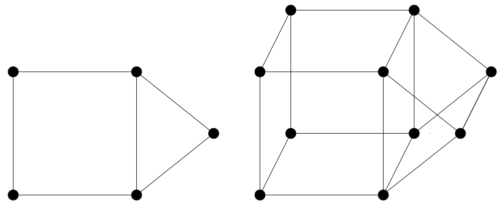
[12] Häggström, O. (2002) *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, Cambridge University Press.

[13] Janson, S. Łuczak, T. and Ruciński, A. (2000) *Random Graphs*, Wiley, New York.

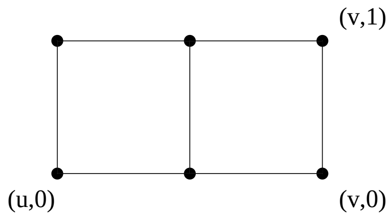
[14] Lyons, R. (2000) Phase transitions on nonamenable graphs, *Journal of Mathematical Physics* **41**, 1099–1146.

[15] Lyons, R. & Peres, Y. (2002) *Probability on Trees and Networks*, kommer att publiceras av Cambridge University Press, preliminär version tillgänglig på
`http://php.indiana.edu/~rdlyons/`

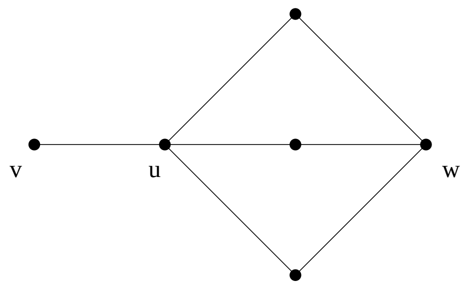
[16] Woess, W. (2000) *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge University Press.



Figur 1. En graf G och motsvarande tvåvåningsgraf G_2.



Figur 2. Om vi startar en slumpvandring i denna graf i noden $X(0) = (u,0)$, finner vi att $\mathbf{P}(T_{(v,0)} \leq 3) = \frac{1}{6}$, medan $\mathbf{P}(T_{(v,1)} \leq 3) = \frac{2}{9}$. Eftersom $\frac{1}{6} < \frac{2}{9}$ är detta alltså ett motexempel till (1). Om man skärskådar exemplet finner man att detta hänger ihop med en viss tidsperiodicitet i slumpvandringen (t.ex. kan noden $(v,0)$ endast besökas vid jämna tidpunkter). Den sortens fenomen inträffar inte för slumpvandringar i kontinuerlig tid.



Figur 3. En graf G som fungerar som motexempel till lite av varje.