Konsten att lösa icke-linjära ekvationssystem

Andreas Axelsson

Vi beskriver här de grundläggande teknikerna för att lösa icke-linjära ekvationssystem. Detta är en nödvändig kunskap för att kunna lösa diverse problem i flervariabelanalysen, då sådana ofta reduceras till ett ekvationssystem. Linjära ekvationsystem tillhör förkunskaperna från linjär algebran. Metoden för att lösa icke-linjära ekvationssystem är i princip densamma (successiv elimination). Dock blir de konkreta räkningarna ofta mer komplicerade.

1/1 system (dvs vanliga ekvationer)

En linjär ekvation är en ekvation av slaget $3x + 8 = 0$. Tom grundskolebarn hittar lätt lösningen $x = -8/3$, så låt oss rask gå vidare till den enklaste icke-linjära ekvationen.

Exempel 1.1. Betrakta andragradsekvationen $2x^2 + 6x + 4 = 0$. Något äldre grundskolebarn löser även denna:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ (x + 3/2)^2 - 9/4 + 2 &= 0 \\ (x + 3/2)^2 &= 1/4 = (1/2)^2 \\ x + 3/2 &= \pm 1/2 \\ x &= (-3 \pm 1)/2 \end{aligned}$$

och finner de två lösningarna $x = -2$ och $x = -1$. Vad gjorde vi? Först snyggade vi till ekvationen genom att dela med koefficienten 2 framför x^2. Sedan kvadratkompletterades, dvs andra kvadreringsregeln $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ användes baklänges. (Kontroll: $(x + 3/2)^2 - 9/4 = x^2 + 3x + 9/4 - 9/4 = x^2 + 3x$.) Givetvis avslutar vi med att KONTROLLERA svaret: t ex $x = -2$ ger att $2x^2 + 6x + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$. Och $x = -1$ ger ...

Mer avancerade icke-linjära ekvationer går inte alltid att snyggt lösa exakt med penna och papper. Ibland kan följande trick vara användbart.

Exempel 1.2. Betrakta den icke-linjära ekvationen $xe^x - x - 2 + 2e^x = 0$. Efter lite stirrande på ekvationen ser man något speciellt: den kan skrivas

$$(e^x - 1)(x + 2) = 0.$$

Eftersom VL är 0 om och endast om en av faktorerna är 0, kan vi falluppdela.

- Fall 1: $e^x - 1 = 0$, dvs $x = \ln(1) = 0$.
- Fall 2: $x + 2 = 0$, dvs $x = -2$.

Ekvationen har således de två lösningarna $x = 0$ och $x = -2$.

Låt oss komma ihåg detta ANVÄNDBARA TRICK för icke-linjära ekvationer. Närhelst en ekvation $f(x) = 0$ kan skrivas $f_1(x)f_2(x) = 0$, där faktorerna f_1, f_2 är enklare uttryck än f själv, bör detta göras. (Notera att detta bara är användbart då HL är 0.) Detta därför att lösningarna till $f(x) = 0$ då utgörs av lösningarna till $f_1(x) = 0$ samt lösningarna till $f_2(x) = 0$.

2/2 system

2/2 system löses genom eliminering av en av variablerna och reducering till 1/1 system. Vi repeterar det linjära fallet (dvs då ekvationerna är på formen “summa av variabler gånger konstanter= konstant”):

Exempel 2.3. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ 2x + 3y = 9. \end{cases}$$

Välj en variabel och en ekvation, t ex x i andra ekvationen. Lös ut denna: $x = (9 - 3y)/2$. Sätt in i den andra ekvationen för att eliminera x:

$$3(9 - 3y)/2 - 2y = 7.$$

Strategin: vi löser nu detta 1/1 system, erhåller lösningar y, vilka i sin tur ger motsvarande $x = (9 - 3y)/2$. Räkningarna:

$$\begin{aligned} 27 - 9y - 4y &= 14 \\ 13 &= 13y \\ y &= 1 \\ x &= (9 - 3y)/2 = 6/2 = 3. \end{aligned}$$

Lösningen är alltså $(x, y) = (3, 1)$. Vi KONTROLLERAR: $3x - 2y = 9 - 2 = 7$ och $2x + 3y = 6 + 3 = 9$.

Låt oss nu genomföra samma typ av reducering för icke-linjära system. Först ett enkelt system:

Exempel 2.4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy = 1, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

Välj en variabel att lösa ut ur en ekvation. Det rekommenderas att välja den som går lättast att lösa ut, t ex y i den andra ekvationen i detta exempel. Vi får $y = x + 2$, som vi använder för att eliminera y i den första ekvationen:

$$x(x + 2) = 1.$$

Detta är en andragradsekvation, så lösningen till detta 1/1 system finnes med hjälp av kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 1 \\ (x + 1)^2 - 1 &= 1 \\ x + 1 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= -1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Den sökta lösningen till 2/2 systemet fås genom att använda $y = x + 2$ för att hitta motsvarande y-värde för vart och ett av x-lösningarna. Vi får de två lösningarna $(x, y) = (-1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ och $(x, y) = (-1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$.

Beroende på hur man går tillväga för att lösa systemet, kan man ibland råka ut för "falska lösningar", dvs att vissa av de erhållna punkterna inte löser det ursprungliga icke-linjära systemet. Därför är det dubbelt viktigt att KONTROLLERA svaret. Dels för att upptäcka räknefel, och dels för att upptäcka (och kasta bort) falska lösningar. I vårt exempel: $xy = (-1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 2 - 1$ (konjugatregeln!) och $y - x = (1 - \sqrt{2}) - (-1 - \sqrt{2}) = 2$, så vi har två äkta lösningar.

Ett typiskt exempel på en ekvation där falska lösningar kan uppkomma är $\sqrt{2x^2-4} = x$. Lösningsgång:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4 &= x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

Här är endast $x = 2$ en äkta lösning, för kontroll av $x = -2$ ger att $\sqrt{2x^2-4} = \sqrt{4} = +2 \neq -2 = x$. (OBS: $\sqrt{a}$ betecknar alltid den POSITIVA ROTEN till $x^2 = a$.) Problemet här ligger i att $\sqrt{2x^2-4} = x$ medför $2x^2 - 4 = x^2$, men inte omvänt. (Ekvationerna är inte ekvivalenta.)

Nu ett lite svårare icke-linjärt 2/2 system:

Exempel 2.5. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2y - xy - 2y^2 = 0, \\ xy + y^3 = 9x^3. \end{cases}$$

Varken x eller y är enkel att lösa ut ur andra ekvationen; för detta behövs tredjegradsekvationer av formen $t^3 + at + b = 0$ lösas. Samma gäller x i första ekvationen. y å andra sidan kan lösas ut ur första ekvationen genom att lösa en andragradsekvation, men räkningarna blir svåra med komplicerade kvadratrötter. Låt oss istället använda FAKTORISERINGS-TRICKET, för stirrar man på första ekvationen så ser man att den kan skrivas

$$(x^2 - y)(x + 2y) = 0.$$

Vi delar upp i två fall:

- Fall 1: $y = x^2$. Vi använder denna ekvation för att eliminera y i den andra ekvationen, och får $x^3 + x^6 = 9x^3$, eller ekvivalent att

  $$x^3(-8 + x^3) = 0.$$

  Ytterligare uppdelning i delfall: Fall 1.1: $x = 0$, vilket ger $y = x^2 = 0$. Fall 1.2: $-8 + x^3 = 0$, vilket ger $x = 2$. (Notera att tredjegradsekvationen $x^3 = a$ alltid har exakt en reell lösning, till skillnad från andragradsekvationen $x^2 = a$.) Motsvarande y-värde blir $y = x^2 = 4$.
- Fall 2: $x = -2y$. Vi använder denna ekvation för att eliminera x i den andra ekvationen, och får $-2y^2 + y^3 = -72y^3$, eller ekvivlant att

  $$y^2(-2 + 73y) = 0.$$

  Ytterligare uppdelning i delfall: Fall 2.1: $y = 0$, vilket ger $x = -2y = 0$. Fall 2.2: $-2 + 73y = 0$, vilket ger $y = 2/73$. Motsvarande x-värde blir $x = -2y = -4/73$.

Sammanfattningvis har vi funnit de tre lösningarna $(x, y) = (0, 0)$, $(x, y) = (2, 4)$ och $(x, y) = (-4/73, 2/73)$. Vi avslutar med att kontrollera att dessa tre faktiskt är lösningar till det ursprungliga ekvationssystemet!

3/3 system

3/3 system löses genom att eliminera en av variablerna och reducera 3/3 systemet till ett 2/2 system, som sedan i sin tur löses enligt ovan genom reducering till 1/1 system, dvs en ekvation i en variabel.

Exempel 3.6. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} yz - 2z + x = 2, \\ xz - 3z + y = 4, \\ xy - 4x - y + 3z = -4. \end{cases}$$

T ex variabeln x är lätt att lösa ut ur första ekvationen: $x = 2 - yz + 2z$. Använd denna ekvation för att eliminera x i de två andra ekvationerna:

$$\begin{cases} (2 - yz + 2z)z - 3z + y = 4, \\ (2 - yz + 2z)(y - 4) - y + 3z = -4. \end{cases}$$

För att lösa detta 2/2 genom reducering till 1/1 system är det enklast att lösa ut y ur första eller z ur andra ekvationen. (De två andra valen av variabler och ekvationer kräver lösning av andragradsekvationer, vilket vi gärna vill undvika innan vi kommer till 1/1 systemet.) Läsaren rekommenderas att genomföra denna räkning. Vi ska här lösa systemet på annat sätt för att återigen illustrera nyttan av FAKTORISERINGSTRICKET. Genom att stanna upp lite i räkningarna och stirra lite på ekvationerna ser man att de två ekvationerna tursamt summeras till

$$(2 - yz + 2z)(y - 4 + z) = 0.$$

Falluppdelning följer.

- Fall 1: $2-yz+2z = 0$. Lös ut y: $y = 2+2/z$. Eliminering av y i t ex första ekvationen i 2/2 systemet ger $-3z + 2 + 2/z = 4$. Denna maskerade andragradsekvation löser vi:

$$\begin{aligned} -3z^2 - 2z + 2 &= 0 \\ z^2 + 2z/3 - 2/3 &= 0 \\ (z - 1/3)^2 &= 2/3 + 1/9 = 7/9 \\ z &= (1 \pm \sqrt{7})/3. \end{aligned}$$

  Detta ger sedan $y = 2 + 2/z = 2 + 6/(1 \pm \sqrt{7}) = 2 - (1 \mp \sqrt{7}) = 1 \pm \sqrt{7}$ genom förlängning med konjugat, och $x = 2 - yz + 2z = 0$.
- Fall 2: $z = 4 - y$. Eliminering av z i t ex första ekvationen i 2/2 systemet ger $(2-4y+y^2+8-2y)(4-y)-12+3y+y = 4$, dvs $(10-6y+y^2)(4-y)-16+4y = 0$. Här ser det svårt ut och vi fruktar en tredjegradsekvation. Men stannar vi upp lite och stirrar på ekvationen så ser vi den gemensamma faktorn $4 - y$, och vi faktoriserar ekvationen till

$$(6 - 6y + y^2)(4 - y) = 0.$$

  Ytterligare uppdelning i fall: Fall 2.1: $y = 4$. Detta ger $z = 4 - y = 0$ och $x = 2 - yz + 2z = 2$. Fall 2.2: $y^2 - 6y + 6$. Här kvadratkompletterar vi:

$$\begin{aligned} (y - 3)^2 &= -6 + 9 = 3 \\ y &= 3 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

  Detta ger $z = 4 - y = 1 \mp \sqrt{3}$ och $x = 2 - yz + 2z = 2 + z(2 - y) = 2 + (1 \mp \sqrt{3})(-1 \mp \sqrt{3}) = 2 + (3 - 1) = 4$.

Sammanfattningsvis har vi hittat de fem lösningarna $(x, y, z) = (0, 1 + \sqrt{7}, (1 + \sqrt{7})/3)$, $(x, y, z) = (0, 1 - \sqrt{7}, (1 - \sqrt{7})/3)$, $(x, y, z) = (2, 4, 0)$, $(x, y, z) = (4, 3 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ och $(x, y, z) = (4, 3 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. Efter dessa omfattande räkningar är det synnerligen motiverat och lätt gjort att kontrollera räkningarna. I själva verket gjorde jag ett slarvfel när jag skrev ned detta som gav $x = 0$, inte $x = 4$ för de två sista lösningarna. Låt oss kontrollera att $(4, 3 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ verkligen är en lösning:

$$\begin{gathered} yz - 2z + x = (y - 2)z + x = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) + 4 = 1 - 3 + 4 = 2, \\ xz - 3z + y = (x - 3)z + y = 1(1 - \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3}) = 4, \\ xy - 4x - y + 3z = (x - 1)y - 4x + 3z = 3(3 + \sqrt{3}) - 16 + 3(1 - \sqrt{3}) = -4. \end{gathered}$$

När det gäller lösning av ekvationssystem kan man gå tillväga på olika sätt, och de olika sätten kan leda till olika svåra räkningar. Vi illustrerar detta med en alternativ lösning av 3/3 systemet ovan.

Exempel 3.7. I exemplet ovan noterade vi under lösningen att summan av de två sista ekvationerna blir enkel: $xz + xy - 4x = 0$, som faktoriseras till

$$x(z + y - 4) = 0.$$

Vi kan låta denna ekvation ersätta den sista ekvationen i 3/3 systemet. (Jämför med radoperationer vid lösning av linjära ekvationssystem.) Vi får direkt 2 fall att undersöka.

- Fall 1: $x = 0$. De två första ekvationerna blir

$$\begin{cases} yz - 2z = 2, \\ -3z + y = 4. \end{cases}$$

- Fall 2: $y = 4 - z$. De två första ekvationerna blir

$$\begin{cases} (2 - z)z + x = 2, \\ xz - 3z + 4 - z = 4. \end{cases}$$

Vart och ett av dessa 2/2 system löses nu. Räkningarna lämnas som övning. Kontrollera lösningarna med tidigare räkning!

En viktig studieteknik, om inte tom den viktigaste, är att efter genomförd räkning reflektera över arbetet och tänka igenom vad som gjordes för att dra lärdom av det. (Annars blir det gjorda räknearbetet synnerligen meningslöst!) Så låt oss sammanfatta metoden för att lösa ekvationssytem. Då mönstret tydligast syns för 3/3 system (eller större), låt oss betrakta ett allmänt icke-linjärt 3/3 system

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ f_3(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Vi löser ut en variabel ur en ekvation (välj den som är lättast), t ex skriv sista ekvationen som $z = f_0(x, y)$. Insatt i första och andra ekvationen erhåller vi ett 2/2 system

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

där $g_1(x, y) = f_1(x, y, f_0(x, y))$ och $g_2(x, y) = f_2(x, y, f_0(x, y))$. Vi upprepar nu samma förfarande för detta 2/2 system. Skriv t ex andra ekvationen som $y = g_0(x)$, och eliminera med denna y ur första ekvationen. Vi får ekvationen

$$h(x) = 0,$$

där $h(x) = g_1(x, g_0(x)) = 0$. Denna löses och vi får rötter $x_1, x_2 \ldots, x_N$. För varje rot x_j beräknar vi sedan $y_j = g_0(x_j)$ och till sist $z_j = f_0(x_j, y_j)$. Detta ger lösningarna (x_j, y_j, z_j), $j = 1, \ldots, N$, till 3/3 systemet.

Det som gör det svårare med icke-linjära system än med linjära sådana, är att dels kan ekvationen $h(x) = 0$ vara svår att lösa, och dels kan det vara svårt att lösa ut variablerna $z = f_0(x, y)$ och $y = g_0(x)$. Vi har i exemplen ovan illustrerat nyttan av FAKTORISERINGSTRICKET för att förenkla räkningarna för icke-linjära system. Ytterligare ett trick som kan förenkla såg vi prov på i sista exemplet, nämligen att göra radoperationer: till en rad kan en multipel av en annan rad adderas. Principen är densamma som för linjära ekvationssystem.