Lösning till problemet december 1998

Antag först att a och b inte innehåller någon gemensam primfaktor. Då måste $c^2 = a^2 + ab + b^2$ vara ett udda tal större än 2 och därför innehåller inte c primfaktorn 2.
Antag nu att c innehåller primfaktorn 3. Eftersom inte både a och b är delbara med 3 kan vi anta att exempelvis b inte innehåller primfaktorn 3. Omskrivningen $4c^2 = 4a^2 + 4ab + 4b^2 = (2a+b)^2 + 3b^2$ visar att 3 delar $(2a+b)^2$ dvs. 3 delar $2a+b$. Men då är $4c^2 - (2a+b)^2$ delbart med $3^2 = 9$, vilket strider mot att b ej kan delas med 3.
Antag nu att c innhåller primfaktorn 5 och att exempelvis b inte innehåller primfaktorn 5. Då är ett av de fyra talen $b-2$, $b-1$, $b+1$ och $b+2$ delbart med 5 dvs. antingen är b^2-1 eller b^2-4 delbart med 5. Med samma argument som i det föregående fallet ser man att $2a+b$ inte heller kan innehålla faktorn 5 och därför är antingen $(2a+b)^2-1$ eller $(2a+b)^2-4$ delbart med 5. Detta betyder att minst ett av uttrycken

$$\begin{aligned}
4c^2 - (2a+b)^2 + 1 - 3(b^2-1) &= 4\\
4c^2 - (2a+b)^2 + 1 - 3(b^2-4) &= 13\\
4c^2 - (2a+b)^2 + 4 - 3(b^2-1) &= 7\\
4c^2 - (2a+b)^2 + 4 - 3(b^2-4) &= 16
\end{aligned}$$

måste vara delbart med 5, vilket inte är fallet. Alltså är minsta primfaktorn i c större än 5. Om a och b båda innehåller primfaktorn p, måste p dela c^2 och därmed c. Division av relationen $c^2 = a^2 + ab + b^2$ med p^2 ger då en relation av samma typ $c_1^2 = a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2$. Genom succesiv division av gemensamma primfaktorer i a och b, kan det allmänna fallet reduceras till det redan behandlade specialfallet.